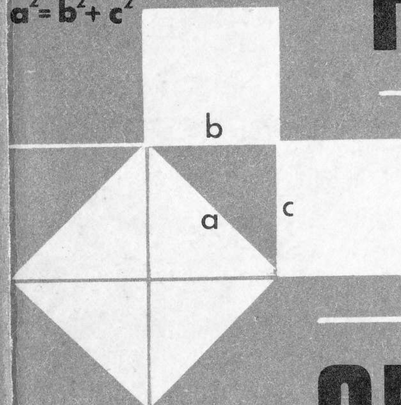
Gh.D.Simionescu

PROBLEME DE SINTEZĂ DE GEOMETRIE PLANĂ ȘI ÎN SPAȚIU



Problemele de sinteză de geometrie plană și în spațiu sînt grupate în cinci capitole: trei de geometrie plană și două de geometrie în spațiu. Fiecare capitol este urmat de cîte zece probleme propuse spre rezolvare, iar indicațiile și răspunsurile sînt date la sfîrșitul cărții.

Se parcurge întreaga materie de liceu prin numeroase probleme de sinteză originale.

Cartea se adresează elevilor din ultimii ani de liceu (care se pregătesc pentru examenul de admitere în învățămîntul superior), profesorilor, studenților din institute pedagogice etc.



Editura tehnică

Lei 5,50

Control științific: Prof. **Nicolae Mihăileanu**
Redactor: **Valentina Crețu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta: **Mariana Negru**

Bun de tipar: 16.III.1978. Coli de tipar: 12. Tiraj: 95.000 + 75 exemplare broșate. CZ 513


Tiparul executat sub comanda nr. 1750 la Întreprinderea Poligrafică „13 Decembrie 1918" str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97 București, Republica Socialistă România

CUVÎNT ÎNAINTE

Această lucrare a fost gîndită ca un ajutor în parcurgerea materiei de geometrie, adresat candidaților la examenul de admitere în învățămîntul superior.

Planul pe care l-am socotit cel mai potrivit scopului a fost de a parcurge materia în succesiunea ei logică, prevăzută de programa școlară, prin exerciții și probleme de sinteză, fără însă ca această succesiune să constituie o regulă strictă. De exemplu, dacă o problemă a fost mai complexă, am recurs la noțiuni din capitolele următoare (presupuse cunoscute din liceu sau în orice caz ușor de reamintit) sau dacă problema s-a pretat la o extindere în spațiu, aceasta s-a făcut pe loc, pentru a păstra unitatea și a nu reveni mai tîrziu asupra ei.

Cartea conține cinci capitole, dintre care trei de geometrie plană și două de geometrie în spațiu.

Originea acestei lucrări a constituit-o un grup de lecții în care am prezentat în 1972 la televiziune o trecere în revistă a geometriei plane și în spațiu. Aceste lecții au fost inițiate în acel an de către Institutul Politehnic București pentru pregătirea la matematici și la fizică a candidaților la examenul de admitere în învățămîntul superior. Mai tîrziu am revăzut materialul de atunci, am introdus în plus probleme ilustrative pentru raționamentul geometric și am adăugat la sfîrșitul fiecărui capitol cîte zece probleme, cu rezolvările date la sfîrșitul cărții. Problemele, în majoritatea acestora, sau le-am construit special pentru lucrarea de față, sau le-am publicat mai de mult în diferite reviste. Desigur, am apelat și la probleme clasice, adaptate nevoilor de ilustrare a unei proprietăți, a unui raționament etc.

În general, problemele sînt alcătuite în genul celor date la examenele de admitere (cîteva chiar date la astfel de examene), deci cu mai multe puncte la care se cer răspunsuri.

O caracteristică a lucrării este că am stăruit și asupra felului în care trebuie prezentată o rezolvare, adică asupra modului de redactare a unei lucrări scrise de geometrie. În acest fel am îmbrățișat diferitele aspecte pe care trebuie să le aibă în vedere un candidat cînd se prezintă la un examen.

AUTORUL

CUPRINS

1. Triunghiuri, poligoane. Egalitatea figurilor, asemănare 5
Probleme propuse spre rezolvare 20

2. Locuri geometrice. Triunghiuri şi patrulatere înscrise în cerc. Poligoane regulate 23
Probleme propuse spre rezolvare 46

3. Relaţii metrice în triunghi şi în cerc. Arii, compararea ariilor 49
Probleme propuse spre rezolvare 80

4. Punctul, dreapta, planul 83
Probleme propuse spre rezolvare 111

5. Poliedre, cilindrul, conul, sfera 113
Probleme propuse spre rezolvare 149

Răspunsuri la problemele propuse 152

1

TRIUNGHIURI, POLIGOANE. EGALITATEA FIGURILOR, ASEMĂNARE

1.1. O figură de bază a geometriei este *linia dreaptă*, cu elementul de bază corespunzător *segmentul de dreaptă*, care se măsoară direct cu unitatea de lungime; toate celelalte mărimi: arii, lungimi de arce, volume etc. *se calculează*, cunoscînd elementele liniare (segmente) corespunzătoare.

Se numeşte *poligon* orice linie frîntă închisă. Dacă linia frîntă este deschisă, îi vom spune *linie poligonală* sau *contur poligonal*.

Cel mai simplu poligon este triunghiul, poligonul cu trei laturi. Deoarece orice alt poligon se poate descompune în triunghiuri, triunghiul apare ca o figură fundamentală a geometriei, ceea ce justifică interesul deosebit acordat studiului acestuia.

1.2. Geometria se dezvoltă pornind de la un mic număr de adevăruri, numite *axiome*, care se admit fără demonstraţie. Axioma care desparte geometria euclidiană de geometriile neeuclidiene este aceea privitoare la paralele. Axioma lui *Euclid* este echivalentă cu formularea care se dă în mod obişnuit: *printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce decît o singură paralelă la acea dreaptă.*

Există însă o serie de proprietăţi şi teoreme care nu folosesc teoria paralelelor. Acestea alcătuiesc ceea ce se numeşte geometria absolută şi sînt comune geometriei euclidiene şi neeuclidiene. Iată cîteva proprietăţi.

1) Unghiurile opuse la vîrf sînt egale.

2) O latură a unui triunghi este mai mică decît suma celorlalte două şi mai mare ca diferenţa lor.

3) Cazurile de egalitate a triunghiurilor. Menţionăm aici în mod special cazurile de egalitate speciale ale triunghiurilor dreptunghice:

a) *Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele egale şi cîte un unghi ascuţit egal sînt egale.*

b) *Două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele egale şi cîte o catetă egală sînt egale.*

4) Într-un triunghi care are două laturi neegale, la latura cea mai mare se opune unghiul cel mai mare.

5) Teoremele referitoare la perpendiculare şi oblice.

6) *Teorema unghiului exterior:* un unghi exterior unui triunghi este mai mare decît oricare unghi interior nealăturat lui.

1.3. Dacă se introduce axioma lui Euclid, atunci se demonstrează că un unghi exterior unui triunghi este egal cu *suma unghiurilor neadiacente lui.* Dar aceasta este o altă teoremă şi anume o teoremă de geometrie euclidiană, spre deosebire de cea de mai înainte care este teoremă de geometrie absolută.

Pentru poligoane *nu sînt cazuri de egalitate*; egalitatea a două poligoane se demonstrează descompunîndu-le în triunghiuri şi dovedind că triunghiurile omoloage sînt egale.

Asemănarea, spre deosebire de egalitatea figurilor, are la bază teoria paralelelor, deci face parte din geometria euclidiană.

Egalitatea triunghiurilor (şi a figurilor în general) se poate deduce din asemănare în cazul că raportul de asemănare este 1.

1.4. Cum pot fi folosite teoremele şi proprietăţile figurilor geometrice la rezolvarea problemelor? Din nefericire, geometria nu dispune decît de foarte puţine metode generale, din care menţionăm:

— *raţionamentul prin reducere la absurd,* folosit mai ales la primele teoreme care decurg din axiome şi la demonstrarea unor teoreme reciproce;

— *reducerea unei probleme la o problemă cunoscută;*

— *metoda locurilor geometrice,* folosită la demonstrarea concurenţei mediatoarelor, a bisectoarelor etc. ca şi în probleme de construcţii grafice;

— *metoda transformărilor de figuri:* translaţie, rotaţie, simetrie etc.

Mai trebuie subliniat un lucru. O problemă poate fi privită din diferite puncte de vedere şi, prin urmare, poate fi soluţionată pe mai multe căi, unele mai greoaie, altele mai scurte şi mai elegante. La un concurs însă interesează în primul rînd găsirea *unei soluţii.* Dacă se poate găsi o soluţie simplă şi frumoasă, cu atît mai bine.

1.5. În cele ce urmează vom încerca să arătăm cum se rezolvă o problemă prin una sau mai multe metode şi să dăm îndrumări asupra prezentării ei.

Problema 1. *Pe laturile unghiului xOy se iau punctele A şi B astfel ca $OA = OB$, apoi punctele C şi D astfel ca $OC = OD$ (A, $C \in Ox$). Să se demonstreze că dreptele AD şi BC se intersectează pe bisectoarea unghiului.*

R e z o l v a r e.

Metoda I. Am ales această problemă deoarece în soluţionarea ei intervin toate cazurile de egalitate a triunghiurilor.

Fie $I = AD \cap BC$. Avem (fig. 1.1)

$$\triangle OAD = \triangle OBC \left\{\begin{array}{ll} OA = OB & \text{ipoteză} \\ OD = OC & \text{ipoteză} \\ \sphericalangle O & \text{comun} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sphericalangle ODA = \sphericalangle OCB \text{ şi} \\ \sphericalangle OAD = \sphericalangle OBC \end{array}\right.$$

(cazul II de egalitate)

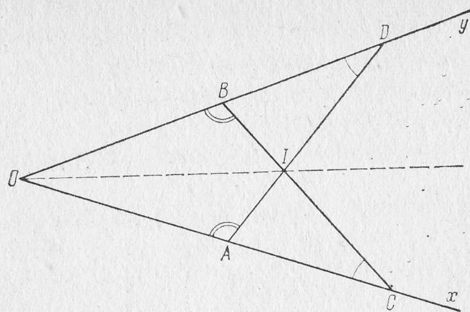


Fig. 1.1

$$\Delta AIC = \Delta BID \begin{cases} AC = BD \text{ diferențe de segmente egale} \\ \sphericalangle ACI = \sphericalangle BDI \text{ din demonstrația precedentă} \\ \sphericalangle IAC = \sphericalangle IBD \text{ ca suplimente de unghiuri egale} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AI = BI$$

(cazul I de egalitate)
În sfîrșit:

$$\Delta OAI = \Delta OBI \begin{cases} OA = OB \text{ ipoteză} \\ AI = BI \text{ din cele precedente} \\ OI \text{ latură comună} \end{cases}$$

(cazul III de egalitate)

Rezultă $\sphericalangle AOI = \sphericalangle BOI$, deci *OI este bisectoare*. Soluția aceasta se găsește în toate manualele și culegerile de probleme care conțin chestiunea la care ne referim.

Dar altfel, mai simplu și mai frumos nu poate fi rezolvată problema? Ba da, dacă ne amintim că: a) axa de simetrie a unui unghi este bisectoarea lui; b) două drepte simetrice, neparalele, se taie pe axa de simetrie.

Metoda II. Să observăm că în problema aceasta:

— simetricul punctului A față de bisectoarea unghiului xOy este B ($\triangle OAB$ este isoscel);

— simetricul punctului D este C (idem).

Atunci simetria dreptei AD este BC și ele se intersectează pe axa de simetrie, adică *pe bisectoare*.

Să menționăm că a doua soluție răspunde exact enunțului, adică arată direct că AD și BC se taie pe bisectoare, pe cînd în prima soluție se procedează invers, adică abia la urmă se arată că OI este bisectoare.

Consecințe. Dacă se ține seama de faptul că $AB \parallel CD$, ambele fiind perpendiculare pe bisectoare, atunci $ABCD$ este trapez isoscel. Se deduc următoarele proprietăți ale trapezului isoscel:

a) diagonalele unui trapez isoscel se întîlnesc pe dreapta care unește mijloacele bazelor (mediatoarea lor comună);

b) diagonalele unui trapez isoscel sînt egale.

Problema 2. *Se ia un punct arbitrar M în interiorul unui pătrat ABCD și prin acesta se duc două drepte perpendiculare care taie laturile opuse ale pătratului respectiv în punctele E, F și G, H* ($E \in AB$; $G \in BC$).

a) *Să se arate că* $EF = GH$.

b) *Unde trebuie să fie așezat punctul M, pentru ca figura EGFH să fie trapez?*

Rezolvare. a) Ca să arătăm că două segmente sînt egale, le facem să fie laturi în triunghiuri egale. Ducem $FF' \perp CD$ și $GG' \perp AD$ și avem triunghiurile dreptunghice (fig. 1.2):

$$\triangle EF'F = \triangle GG'H \begin{cases} FF' = GG' = \text{latura pătratului}, \\ \sphericalangle EFF' = \sphericalangle HGG', \text{ ambele ascuțite, cu laturile perpendiculare.} \end{cases}$$

Rezultă $EF = GH$.

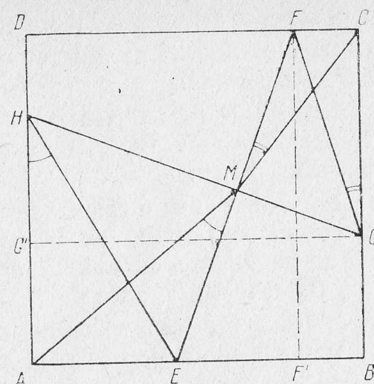


Fig. 1.2

b) Presupunem că $EGFH$ este trapez cu $HE \parallel FG$. Atunci $\sphericalangle AHE = \sphericalangle CGF$ ca avînd laturile paralele. Dar în patrulaterele inscriptibile (unghiuri opuse drepte) $AEMH$ și $CFMG$ avem $\sphericalangle AHE = \sphericalangle AME$ și $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CMF$. Rezultă că $\sphericalangle AME$ și $\sphericalangle CMF$ trebuie să fie opuse la vîrf, deci AM și MC sînt în prelungire, adică $M \in AC$. În mod asemănător, dacă $M \in BD$, figura $EGFH$ este trapez cu $EG \parallel FH$. Dacă M coincide cu centrul pătratului, atunci $EGFH$ devine paralelogram cu diagonalele egale și perpendiculare, adică un pătrat. Din această analiză se desprinde răspunsul la întrebarea din enunț: *pentru ca figura EGFH să fie un trapez strict, trebuie ca M să se afle pe una din diagonalele pătratului dat, exceptînd vîrfurile pătratului și centrul său.*

1.6. **Segmentele determinate pe laturile unui triunghi de punctele de contact ale cercului înscris și ale cercurilor exînscrise.** Considerăm un triunghi ABC și notăm cu D, E, F punctele de tangență dintre laturi și cercul înscris, iar cu D', E', F' punctele de tangență ale cercului exînscris în unghiul A cu aceleași laturi (fig. 1.3). Se știe că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sînt egale, deci $AE = AF = x$; $BF = BD = y$; $CD = CE = z$. Cu notația obișnuită a, b, c, p a laturilor și semiperimetrului triunghiu-

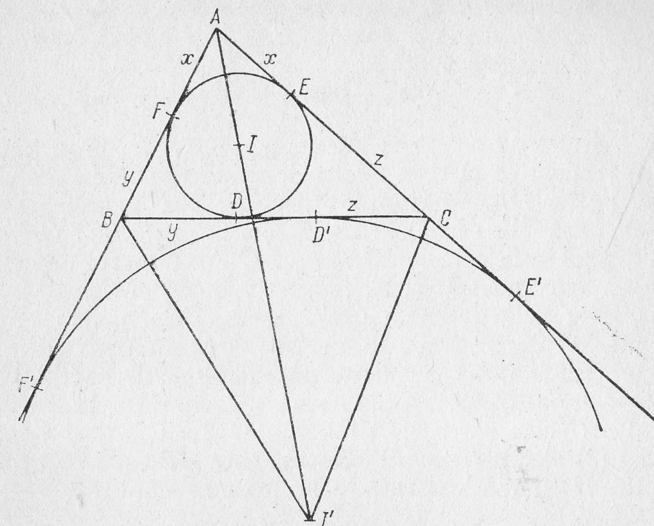


Fig. 1.3

lui, avem $y + z = a$; $z + x = b$; $x + y = c$, de unde rezultă

$$x = AE = AF = p - a; \quad y = BF = BD = p - b;$$

$$z = CD = CE = p - c. \tag{1.1}$$

Apoi $AE' = AF'$, însă $AE' = AC + CE' = AC + CD'$ și $AF' = AB + BF' = AB + BD'$. Adunînd, se obține $AE' + AF' = a + b + c = 2p$, deci

$$AE' = AF' = p. \tag{1.2}$$

Problema 3. *Fiind dat un triunghi și cercul său înscris, se duc trei tangente la acest cerc paralele cu laturile triunghiului. În acest mod se formează alte trei triunghiuri în interiorul triunghiului dat. Să se arate că:*

a) *suma razelor cercurilor înscrise în cele trei triunghiuri este egală cu raza cercului înscris în triunghiul dat;*

b) *produsul ariilor celor patru triunghiuri este egal cu puterea a opta a razei r a cercului înscris în triunghiul dat.*

(Gazeta Matematică, seria B, problema 11 219)

R e z o l v a r e. Vom face un *studiu* al proprietăților figurii respective și vom vedea de unde izvorăsc aceste proprietăți (fig. 1.4). Păstrăm notațiile D, E, F pentru punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile BC, CA, AB, apoi tangenta la cerc paralelă cu BC are punctul de contact în D_a și taie pe AB și AC respectiv în B_a și C_a.

1) Este evident că $\triangle AB_aC_a \sim \triangle ABC$ (teorema fundamentală a asemănării). Raportul de asemănare este dat de raportul a două elemente omoloage și în particular de *raportul perimetrelor*. Să observăm că cercul înscris în triunghiul ABC este exînscris triunghiului AB_aC_a, deci conform relației (2) semiperimetrul acestuia este $AE = AF = p - a$. Rezultă imediat raportul de asemănare căutat

$$k_a = \frac{2(p-a)}{2p} = \frac{p-a}{p}.$$

Dacă ducem și tangentele paralele cu CA și cu CB, se obțin încă două triunghiuri BC_bA_b, CB_cA_c ale căror rapoarte de asemănare cu $\triangle ABC$ sînt

$$k_b = \frac{p-b}{p}, \quad k_c = \frac{p-c}{p}.$$

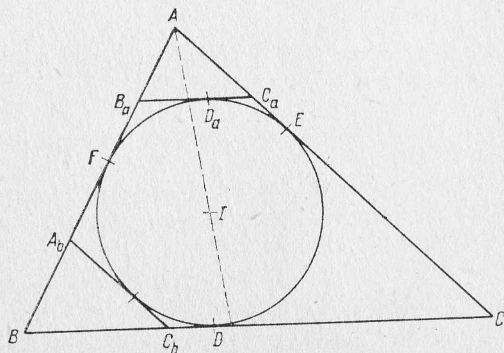


Fig. 1.4

2) Fie S_a, S_b, S_c ariile triunghiurilor mici. Raportul ariilor este dat de

$$\frac{S_a}{S} = \left(\frac{p-a}{p}\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_a}}{\sqrt{S}} = \frac{p-a}{p} \tag{1.3}$$

și cele asemănătoare. Rezultă

$$\frac{\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b} + \sqrt{S_c}}{\sqrt{S}} = \frac{3p - (a+b+c)}{p} = 1,$$

adică

$$\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b} + \sqrt{S_c} = \sqrt{S}. \tag{1.4}$$

Din (3) se mai deduce

$$S_aS_bS_cS = \frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{p^6} S^4 = \frac{S^8}{p^8} = r^8. \tag{1.5}$$

S-a ținut seama că $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

G e n e r a l i z a r e. Fie $MN = l$ un segment oarecare considerat ca aparținînd triunghiului ABC și $M_aN_a = l_a$ segmentul omolog din triunghiul AB_aC_a, iar l_b, l_c segmentele analoage din celelalte triunghiuri. Avem

$$\frac{l_a + l_b + l_c}{l} = \frac{3p - (a+b+c)}{p} = 1,$$

deci

$$l_a + l_b + l_c = l. \tag{1.6}$$

În particular, se poate lua ca segment l raza R a cercului circumscris lui ABC, căreia îi corespund razele R_a, R_b, R_c circumscrise triunghiurilor mici, sau raza r a cercului înscris triunghiului ABC căreia îi corespund razele cercurilor înscrise r_a, r_b, r_c, și, ținînd seama de (1.6), rezultă

$$R_a + R_b + R_c = R; \quad r_a + r_b + r_c = r. \tag{1.7}$$

La sfîrșitul acestui studiu putem formula o problemă mai largă astfel:

Se dă un triunghi ABC și tangenta $B_aC_a \parallel BC$ la cercul înscris triunghiului ($B_a \in AB$, $C_a \in AC$).

a) *Să se afle raportul de asemănare al triunghiurilor AB_aC_a și ABC în funcție de laturile triunghiului dat.*

b) *Notînd cu S_a aria triunghiului AB_aC_a și cu S_b, S_c ariile triunghiurilor analoage, să se arate că*

$$\sqrt{S_a}+\sqrt{S_b}+\sqrt{S_c}=\sqrt{S}.$$

c) $SS_aS_bS_c = r^8$ (*r* fiind *raza cercului înscris*).

d) *Dacă $MN = l$ este un segment considerat ca aparținînd triunghiului ABC, iar l_a, l_b, l_c segmentele omoloage în cele trei triunghiuri mici, atunci*

$$l_a + l_b + l_c = l.$$

Cazuri particulare: a) $l = R$; b) $l = r$.

1.7. **Proprietăți ale trapezului.** Fie un trapez oarecare $ABCD$, cu baza mare AB și baza mică CD, în care notăm (fig. 1.5) $O \equiv AC \cap BD$; $G \equiv AD \cap BC$, iar paralela dusă prin O la baze taie laturile neparalele în E și F ($E \in AD$).

1) *Punctul O este mijlocul segmentului EF.* Într-adevăr, în triunghiul ACD avem $EO \parallel DC$, deci $\frac{EO}{DC}=\frac{AE}{AD}$; apoi la fel $\triangle BFO \sim \triangle BCD$, deci $\frac{OF}{DC}=\frac{BF}{BC}$. Însă EF și cele două baze determină pe AD și BC segmente proporționale, deci $\frac{AE}{AD}=\frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{EO}{DC}=\frac{OF}{DC}$, de unde $EO = OF$.

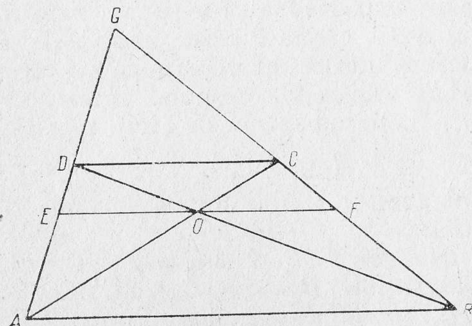


Fig. 1.5

2) *Diagonalele AC și BD se taie într-un raport egal cu raportul bazelor*, adică

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD},$$

ceea ce rezultă imediat din asemănarea triunghiurilor OAB și OCD.

C o n s e c i n ț ă. Dacă o diagonală taie pe cealaltă la mijlocul ei, atunci bazele sînt egale și trapezul devine paralelogram.

3) *Avem relația*

$$\frac{1}{EO}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}. \qquad (1.8)$$

Considerăm perechile de triunghiuri asemenea AOE, ACD și EOD, ABD care dau

$$\frac{EO}{DC}=\frac{AE}{AD}; \quad \frac{EO}{AB}=\frac{DE}{DA},$$

iar prin adunare

$$\frac{EO}{DC}+\frac{EO}{AB}=\frac{AE+ED}{AD}=1 \Rightarrow \frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{EO}.$$

O b s e r v a ț i e. Dacă scriem relația (1.8) sub forma

$$\frac{2}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}, \qquad (1.9)$$

se vede că EF este media armonică a bazelor. Iată deci un mijloc foarte simplu de a construi media armonică a două segmente a, b: se construiește un trapez cu singura condiție ca a și b să fie bazele lui, apoi prin punctul de intersecție a diagonalelor se duce paralela la baze, care determină pe laturile neparalele punctele E și F. Media armonică cerută este EF.

4) *Punctele G, E sînt conjugate față de A, D, iar G, F sînt conjugate față de B, C.*

Într-adevăr*), $\frac{EA}{ED}=\frac{OA}{OC}=-\frac{AB}{CD}$, apoi din triunghiurile asemenea GAB, GDC se deduce $\frac{GA}{GD}=\frac{AB}{CD}$, astfel că

$$\frac{GA}{GD}=-\frac{EA}{ED}, \qquad (1.10)$$

relație care arată că G și E sînt conjugate față de A și D.

*) Semnul minus apare datorită faptului că segmentele se consideră orientate.

Demonstrație asemănătoare pentru celelalte perechi de puncte: G, F și B, C.

Problema 4. *Se dau două semidrepte fixe Ox și Oy, care fac între ele un unghi ascuțit. Pe Ox se consideră punctele fixe A și B. Prin A și B se duc două drepte paralele, care fac unghiul α cu Ox și care întîlnesc pe Oy respectiv în D și C.*

a) *Să se demonstreze că raportul $\frac{AD}{BC}$ este constant cînd α variază.*

b) *Fie I intersecția segmentelor AC și BD, iar E și F punctele în care paralela dusă prin I la AD întîlnește pe Ox, respectiv pe Oy. Să se demonstreze că punctul E este fix cînd α variază.*

c) *Paralela prin D la Ox taie pe BC în M. Să se arate că lungimea segmentului DM este constantă și să se deducă locul geometric al lui M cînd unghiul α variază de la $0°$ la $180°$.*

(Institutul Politehnic București, concurs de admitere 1971)

Rezolvare.

a) Deoarece $AD \parallel BC$, rezultă $\triangle OAD \sim \triangle OBC$, deci (fig. 1.6)

$$\frac{AD}{BC} = \frac{OA}{OB} = \text{const.}$$

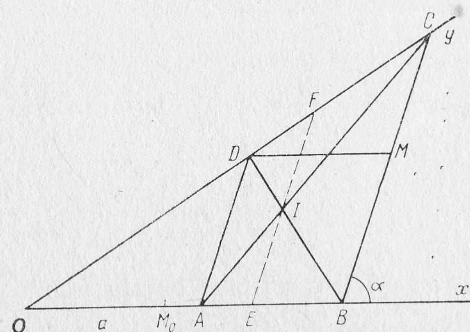


Fig. 1.6

b) $\triangle IAD \sim \triangle IBC$, de unde se deduce

$$\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{BC}, \quad \text{dar} \quad \frac{ID}{IB} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BC} = \text{const.}$$

Punctul E este prin urmare fix.

c) $ABMD$ fiind paralelogram, rezultă că $DM = AB = a = \text{const.}$ Cînd unghiul α variază, DM are o mișcare de translație și M descrie o paralelă la Oy.

Dacă $\alpha = 0$, $M \to \infty$, iar dacă $\alpha = 180°$, D vine în O și M în M_0, astfel că $OM_0 = AB = a$.

Prin urmare, locul geometric căutat este semidreapta care pornește din M_0 și este paralelă la Oy.

Observație. Această problemă este o ilustrare a proprietăților trapezului de la 1.7, anume că diagonalele se taie într-un raport egal cu raportul bazelor și că E este conjugatul punctului O față de A și B, deci fix.

Problema 5. *Se dă trapezul oarecare $ABCD$ (AB fiind baza mare) și se notează $O \equiv AC \cap BD$; $G \equiv AD \cap BC$. Fie $EF \parallel BC$ care trece prin O ($E \in AD$; $F \in BC$) și I piciorul perpendicularei duse din G pe EF. Să se demonstreze că IE și IF sînt bisectoarele unghiurilor AID și BIC.*

Rezolvare. Se știe (vezi 2.1) că locul geometric al punctelor M care au raportul distanțelor la două puncte fixe P și Q constant (k) este un cerc care are ca diametru segmentul determinat de cele două puncte conjugate care împart pe PQ în raportul k (în valoare absolută).

Aplicînd la problema noastră, locul punctelor M astfel ca $\frac{MA}{MD} = \frac{AE}{ED}$ este cercul de diametru EG. Acest cerc intersectează pe EF a doua oară în I (fig. 1.7), deoarece $\measuredangle EIG = 90°$. Rezultă că $\frac{IA}{ID} = \frac{AE}{ED}$, adică IE este bisectoarea unghiului AID. La fel se demonstrează că IF este bisectoarea unghiului BIC.

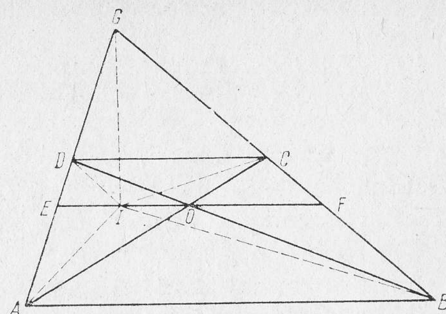


Fig. 1.7

Problema 6. *Se consideră în plan două paralelograme $ABCD$ și $A'B'C'D'$ așezate oricum. Fie A_0, B_0, C_0, D_0 mijloacele segmentelor AA', BB', CC', DD'. Să se demonstreze că $A_0B_0C_0D_0$ este paralelogram.*

D e m o n s t r a ț i e. Mai notăm cu E și F mijloacele segmentelor BA' și DC' (fig. 1.8). În triunghiul ABA', A_0E unește mijloacele a două laturi, deci $A_0E \parallel AB$ și $A_0E = \frac{1}{2}AB$. În triunghiul CDC', C_0F unește mijloacele a două laturi, deci $C_0F \parallel CD$ și $C_0F = \frac{1}{2}CD$. Rezultă imediat că $A_0E \parallel C_0F$. Dar *dacă într-un patrulater convex două laturi opuse sînt egale și paralele, atunci patrulaterul este paralelogram.* Prin urmare, A_0EC_0F este paralelogram și diagonalele sale se taie în punctul ω, mijloc al lui A_0C_0 și al lui EF. În mod asemănător, se arată că $EB_0 \parallel A'B'$ și $EB_0 = \frac{1}{2}A'B'$, apoi că $FD_0 \parallel C'D'$ și $FD_0 = \frac{1}{2}C'D'$, de unde rezultă că EB_0FD_0 este paralelogram, deci diagonala B_0D_0 trece prin ω, mijlocul lui EF, care este în același timp mijlocul lui B_0D_0. Deoarece în patrulaterul $A_0B_0C_0D_0$ diagonalele se taie în părți egale, figura este paralelogram.

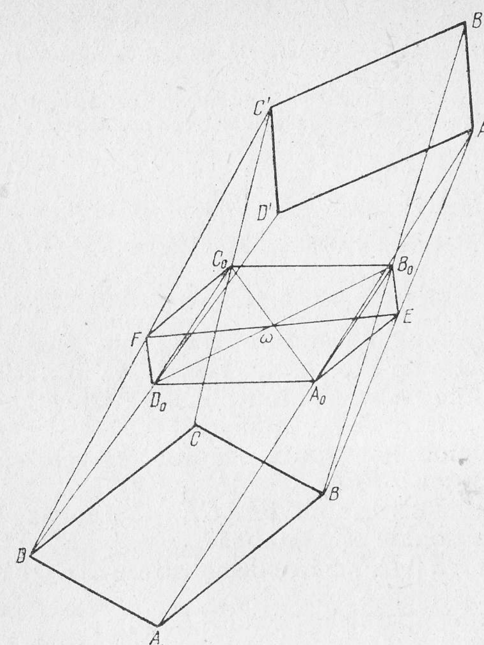


Fig. 1.8

O b s e r v a ț i i. 1. Este interesant de căutat direcțiile pe care le au laturile paralelogramului $A_0B_0C_0D_0$. Pentru aceasta, să observăm că putem scrie relația vectorială $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{A_0E} + \overrightarrow{EB_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}) = \frac{1}{2}\vec{u}$, deci $\overrightarrow{A_0B_0}$ are direcția rezultantei $\vec{u}$ a sumei vectoriale $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B'}$ și are mărimea $\frac{1}{2}|\vec{u}|$. La fel dacă se consideră și mijlocul G al segmentului DA', atunci din triunghiul A_0GD_0 se deduce că $\overrightarrow{A_0D_0} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B'C'}) = \frac{1}{2}\vec{v}$.

2. Deoarece paralelogramele pot avea poziții oarecare unul față de altul, rezultă că mai putem considera și corespondențele $ABCD - B'C'D'A'$;

$ABCD - C'D'A'B'$; $ABCD - D'A'B'C'$, care dau naștere la alte trei paralelograme.

3. Acestei probleme i se poate da o soluție vectorială, care însă nu intră în cadrul acestei lucrări.

4. Proprietatea se păstrează și în cazul cînd paralelogramele date nu sînt în același plan. Demonstrația este absolut asemănătoare.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Se dă triunghiul oarecare ABC, un punct $D \in BC$ și E, F simetricele lui D respectiv față de AC și AB.

a) Ce condiție trebuie să îndeplinească triunghiul pentru ca punctele E, A, F să fie coliniare?

b) Presupunînd îndeplinită condiția, se cere să se afle minimul conturului $BFEC$.

c) Să se demonstreze că $BF \parallel CE$. În ce caz diferența acestor două segmente este minimă?

d) Fie $G \equiv BE \cap CF$. Să se demonstreze că $GD \parallel BF \parallel CE$.

2. Se consideră paralelogramul $ABCD$.

a) Să se ducă prin C o dreaptă Δ exterioară paralelogramului, astfel că notînd $E \equiv \Delta \cap AB$, $F \equiv \Delta \cap AD$ să avem $CF = 2CE$.

b) Fie A' simetricul lui A față de E. Să se arate că diagonala AC trece prin mijlocul lui FA'.

3. Pe laturile AB, CD ale paralelogramului $ABCD$ se iau arbitrar punctele M, N. Dreapta Δ care unește mijloacele laturile BC, DA întîlnește succesiv segmentele AN, MD, BN, MC în E, F, G, H. Să se demonstreze că $EF = GH$.

4. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau punctele M, N, P, Q (unde M este arbitrar pe AB) astfel ca $\sphericalangle BMN = \alpha$, $\sphericalangle CNP = 2\alpha$, $\sphericalangle QPD = 3\alpha$. Să se determine α astfel ca $MNPQ$ să fie trapez isoscel.

5. Se consideră un patrulater oarecare $ABCD$, în care notăm cu M, N mijloacele diagonalelor AC, BD, apoi cu

E, F proiecțiile lui A pe CB, CD, cu G, H proiecțiile lui C pe AB, AD și în sfîrșit $P \equiv AE \cap CG$, $Q = AF \cap CH$.

a) Să se demonstreze că

$$MB + MD + NA + NC < AB + BC + CD + DA.$$

b) Ce condiție trebuie să satisfacă patrulaterul $ABCD$ pentru ca dreapta PQ să se suprapună diagonalei BD?

6. Se dă patrulaterul oarecare $ABCD$ și se construiește pe latura AD triunghiul ADE direct asemenea cu ABC ($\sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC$).

a) Să se demonstreze că $\triangle ACE \sim \triangle ABD$.

b) Să se deducă de aici că în general

$$AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

În ce caz avem egalitate între cele două părți?

7. Trei triunghiuri ABC, CDE, EFG au laturile AC, CE, EG în prelungire, laturile AB, CD, EF paralele și BC, DE, FG de asemenea paralele. Să se arate că pentru ca punctele B, D, F să fie coliniare, condiția necesară și suficientă este ca CD să fie media geometrică a laturilor AB și EF.

8. Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi oarecare se duc perpendicularele pe medianele respective. Acestea formează un nou triunghi $A'\,B'\,C'$ (A' fiind intersecția perpendicularelor în B și C pe medianele respective etc.).

a) Să se demonstreze că perpendicularele duse din A', B', C' respectiv pe BC, CA, AB se întîlnesc într-un punct G', simetricul centrului de greutate G al lui ABC, în raport cu centrul cercului său circumscris.

b) Fie G_1 proiecția lui G pe BC, h_a înălțimea din A a triunghiului ABC, iar L proiecția lui A' pe BC. Să se demonstreze că

$$A'L = 3\,\frac{BG_1 \cdot G_1C}{h_a}.$$

9. Se ia un segment OA_0, apoi prin O se duc dreptele OA_1, OA_2, ..., astfel ca $\sphericalangle A_0OA_1 = \sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \ldots = \alpha$, iar $\sphericalangle OA_0A_1 = \sphericalangle OA_1A_2 = \ldots = \theta$.

a) Să se arate că $OA_0, OA_1, \ldots, OA_n$ formează o progresie geometrică și să se exprime OA_n în funcție de rația progresiei.

b) Să se găsească $\lim\limits_{n\to\infty} OA_n$.

c) Să se exprime OA_n în funcție de $OA_0 = a_0$, $A_0A_1 = a_1, \ldots, A_{n-1}A_n = a_n$, dacă $\theta = 90°$.

d) Considerăm numai cinci raze $OA_0, OA_1, \ldots, OA_4$ și o dreaptă (Δ) neparalelă cu vreuna dintre acestea. Notînd cu A, B, C, D, E intersecțiile razelor $OA_0, OA_1, \ldots, OA_4$ cu (Δ), să se demonstreze că

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB \cdot EC}{AC \cdot ED}.$$

10. Se dă trapezul oarecare cu bazele AB și CD. Pe laturile neparalele BC și AD ca diametre se construiesc cercurile (O_1) și (O_2), iar pe baza mică CD ca diametru, semicercul (Γ) exterior trapezului. Notăm cu E și F mijloacele bazelor AB și CD. Fie punctul $P \in (\Gamma)$. Dreptele PC, PD întîlnesc din nou cercurile (O_1), (O_2) respectiv în M, N și notăm $Q \equiv MB \cap NA$.

a) Ce figură este $PMQN$?

b) Să se demonstreze că $FP \parallel EQ$.

c) Să se demonstreze că dreapta PQ trece prin punctul I de intersecție a diagonalelor trapezului.

d) Să se găsească locul geometric al punctului $K = MO_1 \cap NO_2$.

2

LOCURI GEOMETRICE. TRIUNGHIURI ȘI PATRULATERE ÎNSCRISE ÎN CERC. POLIGOANE REGULATE

2.1. **Locuri geometrice. Definiție.** Se numește *loc geometric* mulțimea tuturor punctelor care au o proprietate caracteristică comună.

Exemple

1) Cercul este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix, numit centrul cercului.

2) Mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele segmentului.

În geometria plană un loc geometric poate fi alcătuit dintr-o singură linie, ca în exemplele precedente, dar poate fi alcătuit și *din mai multe linii* sau chiar din *porțiuni de plan*.

Exemple

3) Locul geometric al punctelor care se găsesc la o distanță dată d față de o dreaptă este format din două drepte paralele cu dreapta dată, la distanța d, de o parte și de alta a acesteia.

4) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente este alcătuit din cele două bisectoare (perpendiculare) ale unghiurilor formate de dreptele date.

Pentru a găsi un loc geometric, trebuie ca:

a) să se determine mulţimea punctelor care satisfac proprietatea dată prin enunţ;

b) *reciproc*, să se demonstreze că orice punct al mulţimii are proprietatea dată.

Teorema reciprocă se poate înlocui cu *teorema contrară*, anume că nici un alt punct al planului nu mai are proprietatea din enunţ.

Se poate ca locul geometric să fie limitat, adică să fie numai o parte dintr-o curbă. Aceasta depinde de condiţiile problemei, dar cere o cercetare atentă. Studiul unei probleme de loc geometric se poate face pur geometric sau cu ajutorul geometriei analitice.

Aici ne limităm la studiul pe cale geometrică. Pentru aceasta este bine să reamintim cîteva *locuri geometrice fundamentale*, la care în mod obişnuit se reduc cele pe care le căutăm.

1) Cercul şi mediatoarea au fost menţionate mai înainte,

2) a) Locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unui unghi este *bisectoarea acelui unghi*, deci o semidreaptă.

b) Locul punctelor egal depărtate de două *drepte concurente* este format din *cele două bisectoare* ale unghiurilor determinate de dreptele date.

c) Locul punctelor egal depărtate de două drepte paralele este *dreapta* echidistantă faţă de acestea.

3) Locul geometric al punctelor de unde *un segment dat* AB este văzut sub un unghi constant α este alcătuit din două arce de cerc ce trec prin A şi B, care se numesc arce capabile de unghiul α.

În particular, dacă $\alpha = 90°$, locul geometric este întreg cercul cu diametrul AB.

4) a) Fie (D) o dreaptă, O un punct exterior ei şi M un punct mobil pe (D). Locul geometric al punctului N care împarte segmentul OM într-un raport constant $\left(\frac{ON}{OM} = k\right)$ este o dreaptă $(\Delta) \parallel (D)$.

b) Dacă dreapta (D) se înlocuieşte cu un cerc (C) de rază R, cu centrul C şi $M \in (C)$, atunci N descrie tot un cerc cu centrul C' şi raza R' astfel că

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{ON}{OM} = \frac{R'}{R} = k.$$

5) Locul geometric al punctului M care se mişcă în plan păstrînd constantă *diferenţa pătratelor distanţelor* la două puncte fixe A şi B, $MA^2 - MB^2 = \text{const}$, este o dreaptă perpendiculară pe AB. În cazul particular cînd constanta este egală cu *zero*, regăsim mediatoarea segmentului AB.

Observaţie. Deoarece se poate ca $MA > MB$ sau invers $MA < MB$, diferenţa poate fi pozitivă sau negativă; se poate însă scrie sub o singură formă $|MA^2 - MB^2| = k^2$, unde k reprezintă o lungime.

6) Locul punctului M care se mişcă în plan păstrînd raportul distanţelor la două puncte fixe A şi B $\left(\frac{MA}{MB} = k\right)$ este *un cerc*. Dacă notăm cu D şi D' punctele (interior şi exterior) care împart segmentul AB în raportul k, locul lui M este cercul cu diametrul DD'.

2.2. **Cum se rezolvă o problemă de loc geometric?** Nu există o metodă generală aşa cum există în geometria analitică, ci trebuie studiată cu atenţie problema şi figura corespunzătoare pentru a desprinde elementele care pot reduce problema la unul din locurile geometrice de bază. În nici un caz nu se va spune, aşa cum am citit în nenumărate lucrări scrise de la examenele de admitere la Institutul politehnic: luăm poziţia particulară I căreia îi corespunde M_1, poziţia particulară II căreia îi corespunde M_2, apoi M_3, deci locul trece prin M_1, M_2, M_3 şi este o dreaptă (dacă cele trei puncte par a fi coliniare) sau un cerc etc., afirmaţii făcute *fără nici o justificare*.

Ceea ce trebuie subliniat în mod deosebit este că problemele de loc geometric constituie probleme de sinteză, care pun în joc multe cunoştinţe de geometrie.

2.3. Exemple

Problema 1. *Se cere locul geometric al centrului unui cerc de rază dată R, care determină pe o dreaptă (Δ) o coardă de lungime dată l.*

Rezolvare. Fie $MN = l$ coarda situată pe (Δ) și O centrul cercului. Triunghiul isoscel OMN are laturile cunoscute $OM = ON = R$ și $MN = l$, deci rămîne egal cu el însuși oriunde s-ar deplasa, iar înălțimea este constantă, $OP = d$. Am ajuns la un loc geometric cunoscut, anume al punctului O care păstrează constantă distanța d față de dreapta (Δ). Locul se compune din două drepte paralele cu (Δ), situate la distanța d de o parte și de alta a acesteia.

Problema 2. *Se consideră două drepte paralele* (D_1), (D_2) *și un punct fix O exterior acestora. Fie* $M \in (D_1)$ *și* $N \in (D_2)$ *două puncte arbitrare pe dreptele respective. Se cere:*
a) *locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului OMN, cînd M și N se mișcă independent pe dreptele respective;*
b) *locul geometric al intersecției* $OG \cap MN$.

Rezolvare. În prealabil să facem o observație. Dacă pe două drepte paralele date (D) și (D') se consideră respectiv punctele M și N arbitrar alese, apoi punctul $L \in MN$ astfel ca $\frac{LM}{LN} = k =$ const, atunci cînd M și N au mișcări independente una de alta pe dreptele respective, punctul L descrie ca loc geometric o paralelă (Δ) la (D) și (D') care împarte distanța AB dintre dreptele date în raportul k (fig. 2.1). În particular dacă L este mijlocul lui MN, locul geometric descris este dreapta echidistantă de (D) și (D'). Este un caz

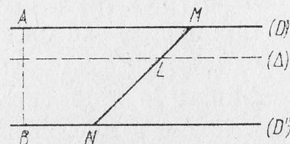


Fig. 2.1

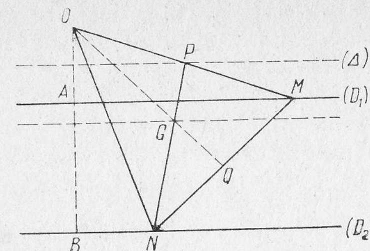


Fig. 2.2

de *existență a unui loc geometric*, deși problema conține clar *doi parametri independenți*: pozițiile punctelor M și N.

Demonstrația este simplă: orice poziție ar avea MN, împreună cu AB (distanța între paralele) formează un trapez (convex sau concav), iar paralela dusă prin L la baze taie pe AB în L_0, astfel că $\frac{L_0A}{L_0B} = k$, deci L_0 este fix.

Revenim acum la problema propusă.

a) Locul mijlocului P al segmentului OM este o paralelă (Δ) la (D_1) care trece prin mijlocul distanței OA de la O la (D_1). Punctele N și P se mișcă arbitrar pe (D_2) și (Δ) dar $\frac{GP}{GN} = \frac{1}{2}$, deci locul geometric al lui G este o paralelă la (D_2) care împarte distanța între (Δ) și (D_2) în raportul $\frac{1}{2}$ (fig. 2.2).

b) Punctul $Q \equiv OG \cap MN$ este mijlocul lui MN, deoarece OG este mediană. Oricum s-ar deplasa M și N pe dreptele respective, locul lui Q este dreapta echidistantă de (D_1) și (D_2).

Problema 3. *Pe un cerc (O) se dau două puncte A și B. În aceste puncte se duc două cercuri tangente cercului (O) și tangente între ele într-un punct P. Se cere locul geometric al punctului P.*

(Concursul G.M. 1909)

Rezolvare. Fie ω intersecția tangentelor în A și B la cercul (O), deci ω este un punct fix. Notăm cu O_1 și O_2 centrele cercurilor tangente respectiv în A și B la cercul (O). Deoarece $\omega A = \omega B$, rezultă că ω are puteri egale față

de (O) şi (O_1) şi faţă de (O) şi (O_2), deci are puteri egale faţă de (O_1) şi (O_2), adică se află pe tangenta comună în P a acestor cercuri. Cele trei tangente comune în A, B şi P fiind concurente, se deduce $\omega P = \omega A = \omega B = \text{const}$, prin urmare, locul descris de punctul P este cercul cu centrul ω (fix) şi cu raza ωA şi anume *întreg cercul*, deoarece (O_1) şi (O_2) pot fi tangente lui (O) în A şi B fie exterior, fie interior.

Observaţii. 1. Se putea spune deodată că ω este centrul radical al celor trei cercuri.

2. În tot ce s-a spus mai înainte s-a presupus că tangentele în A şi B la cercul (O) se întîlnesc la distanţă finită. Dacă A şi B sînt însă diametral opuse, atunci tangentele sînt paralele. Cercurile (O_1) şi (O_2) au punctul P de tangenţă fie pe diametrul AB (dacă ambele sînt tangente interior), fie pe dreapta AB în exterior (dacă un cerc este tangent exterior şi unul interior), deci locul punctului P este toată dreapta AB. (Tangentele comune în A, B, P sînt paralele.)

Problema 4. *Se dau dreptele Ox, Oy şi un punct fix A în planul lor. O dreaptă variabilă ce trece prin A întîlneşte pe Ox şi Oy respectiv în M şi N. Perpendicularele în M şi N pe MN întîlnesc respectiv pe Oy şi Ox în Q şi P. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptei PQ cu perpendiculara dusă din O pe MN.*

Rezolvare. Problema este mai puţin simplă ca cele precedente şi deci cere un studiu mai atent. În primul rînd se caută locul punctului H (fig. 2.3) ($OH \perp MN$) care este evident cercul cu diametrul OA, O şi A fiind puncte fixe.

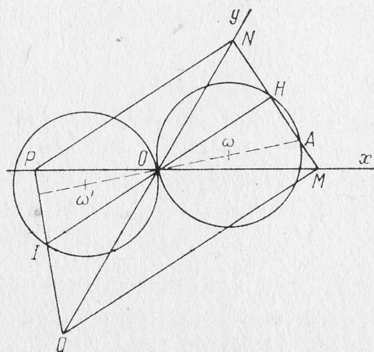


Fig. 2.3

Apoi trebuie să se observe că $MNPQ$ este un trapez în care O este intersecţia diagonalelor şi că $OH \parallel MQ \parallel NP$. Dacă $I \equiv PQ \cap OH$, atunci se ştie * că $OI = OH$, deci I este simetricul lui H faţă de O. Rezultă că I descrie cercul simetric faţă de O al cercului (OAH), cele două cercuri avînd centrele ω, ω' simetrice faţă de O, situate pe OA.

Problema 5. *Pe segmentul de dreaptă AB se ia un punct mobil M şi se construiesc pe segmentele AM, BM luate ca baze pătratele $AMCD$, $BMEF$ situate pe aceeaşi parte faţă de AB. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului care uneşte centrele celor două pătrate.*

(O.I.M. 1959, autor Cezar Coşniţă; enunţ parţial)

Rezolvare. Fie O_1 şi O_2 centrele pătratelor $AMCD$ şi $BMEF$, iar I_1 şi I_2 proiecţiile lor pe AB. Atunci $O_1I_1 = \frac{1}{2}AM$ şi $O_2I_2 = \frac{1}{2}BM$ (fig. 2.4). Dacă ω este mijlocul lui O_1O_2 şi I proiecţia sa pe AB, rezultă din trapezul $O_1I_1I_2O_2$:

$$\omega I = \frac{1}{2}(O_1I_1 + O_2I_2)$$

şi deci

$$\omega I = \frac{1}{4}(AM + MB) = \frac{AB}{4} = \text{const.}$$

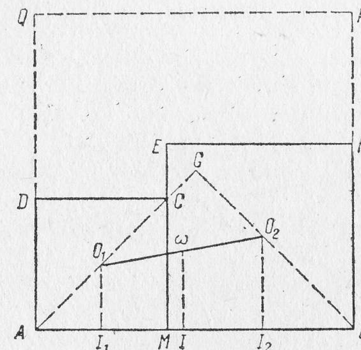


Fig. 2.4

* Vezi 1.7, proprietăţi ale trapezului.

Așadar, ω descrie o paralelă la AB.

Limitarea locului. În poziția extremă cînd $M \equiv A$, pătratul descris pe AM are ca limită punctul A, iar pătratul $ABPQ$ are ca centru mijlocul G al lui AP. Punctul ω va avea poziția limită ω_A, mijlocul lui GA. La fel cînd $M \equiv B$, ω are ca poziție limită ω_B, mijlocul lui GB. Rezultă că locul geometric al punctului ω este segmentul *deschis* $\omega_A \omega_B$ (deci fără capetele segmentului), situat la distanța $\frac{1}{4}AB$ față de dreapta AB.

Iată deci un caz de loc geometric limitat prin chiar natura problemei.

Problema 6. *Se dau două drepte concurente $x'Ox$, $y'Oy$ și un cerc (C) tangent celor două drepte, avînd punctul de contact M cu dreapta $x'Ox$. Prin M se duce o dreaptă care taie din nou cercul în N. Se cere locul geometric al punctului N cînd cercul (C) variază rămînînd tangent dreptelor date, iar dreapta MN păstrează o direcție fixă.*

Rezolvare. Considerăm două poziții (C), (C') ale cercului tangent dreptelor $x'Ox$, $y'Oy$, ambele situate în unghiul xOy (fig. 2.5). Evident, centrele C și C' se află pe bisectoarea unghiului; punctele de contact cu $x'Ox$ sînt

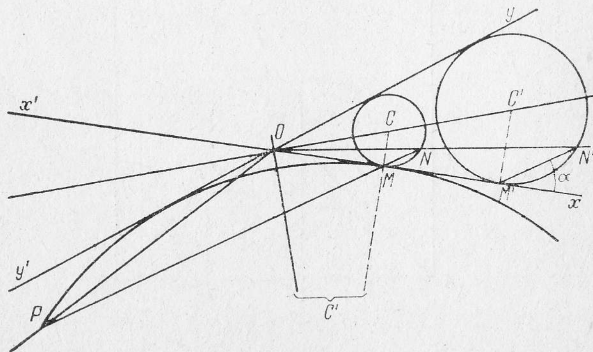


Fig. 2.5

M, M', iar $M'N' \parallel MN$ $[N' \in (C')]$. Dacă notăm $\sphericalangle NMx = \alpha = \text{const}$, atunci $\sphericalangle MCN = \sphericalangle M'C'N' = 2\alpha$ și triunghiurile isoscele MCN, $M'C'N'$ sînt asemenea. Rezultă

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{CM}{C'M'},$$

iar din triunghiurile dreptunghice $OCM \sim OC'M'$:

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{OM}{OM'},$$

de unde se deduce

$$\frac{MN}{M'N'} = \frac{OM}{OM'};$$

dacă alăturăm $\sphericalangle OMN = \sphericalangle OM'N' = 180° - \alpha$, avem

$$\triangle OMN \sim \triangle OM'N' \Rightarrow \sphericalangle MON = \sphericalangle M'ON',$$

cu alte cuvinte punctele O, N, N' sînt coliniare, sau $N' \in ON$. Deci toate punctele N aparțin unei drepte (d) care trece prin origine.

Trebuie observat însă că mai există un cerc tangent dreptelor date, avînd punctul de contact cu $x'Ox$ în M, dar cu centrul C_1 pe bisectoarea exterioară a unghiului xOy. Dreapta MN taie acest cerc din nou în P. Un raționament asemănător cu cel de mai înainte arată că P descrie o dreaptă (d') care trece prin O.

În concluzie: locul geometric al intersecției cercurilor tangente la două drepte date cu o dreaptă de direcție fixă dusă prin M (punctul de contact cu $x'Ox$) este compus din două drepte care trec prin O (intersecția dreptelor date).

Problema 7. *Se dă un segment AB și un punct fix $P \in AB$, exterior segmentului (pentru a nu mai fi nevoie de discuție). Fie M un punct al planului. Se cere locul geometric al lui M știind că perpendiculara din M pe MP taie segmentul AB.*

Rezolvare. Considerăm un punct M care satisface enunțul, adică perpendiculara în M pe MP taie segmentul AB în punctul N. Se vede imediat că dacă păstrăm pe N fix, orice punct al cercului cu diametrul PN satisface enun-

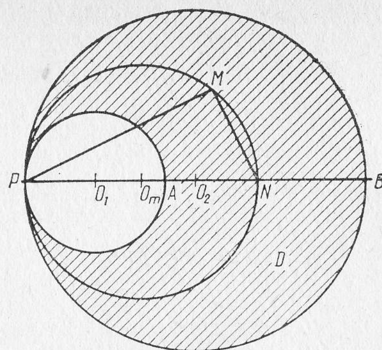


Fig. 2.6

ţul şi toate perpendicularele pe MP în M taie segmentul AB în acelaşi punct N. Fără a restrînge generalitatea problemei, putem presupune punctul P exterior segmentului AB, de partea lui A. Cercul cu raza cea mai mică este (O_1) cu diametrul PA şi cercul cel mai mare este (O_2) cu diametrul PB (fig. 2.6).

Rezultă că orice punct M cuprins în domeniul D dintre cercurile (O_1) şi (O_2) satisface problema, adică *locul geometric* cerut este porţiunea de plan D. Mai trebuie arătat că, reciproc, fiind dat $M \in D$, perpendiculara în M pe MP taie segmentul AB în interior. Aceasta rezultă imediat observînd că cercul cu centrul $O_m \in AB$, care trece prin P şi M are diametrul cuprins între PA şi PB.

2.4. **Triunghiul şi cercul său circumscris.** Ne propunem să facem un mic studiu al proprietăţilor triunghiului în legătură cu cercul circumscris. Aceste proprietăţi se găsesc în culegeri şi manuale ca probleme separate, dar aici vrem să le dăm un caracter unitar astfel încît să se vadă cum se poate conduce raţionamentul geometric.

Considerăm deci triunghiul oarecare ABC înscris în cercul cu centrul O, înălţimile AA', BB', CC' ale triunghiului, H ortocentrul său, M mijlocul laturii BC şi D punctul diametral opus al lui A (fig. 2.7). Iată cîteva proprietăţi.

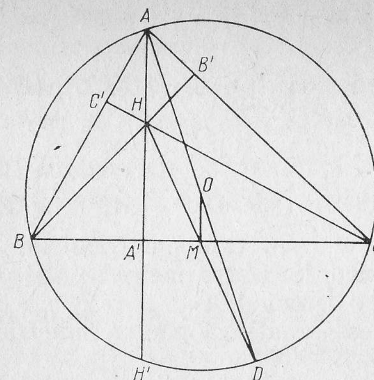


Fig. 2.7

1) *Ortocentrul H, mijlocul M al laturii BC şi punctul D diametral opus lui A sînt trei puncte coliniare.*

Pentru demonstraţie se va observa că $\sphericalangle ACD = 90°$, ca fiind înscris într-un semicerc, deci $DC \perp AC$. Dar $BB' \perp AC \Rightarrow DC \parallel BH$. La fel se arată că $BD \parallel CH$. Se deduce că $BHCD$ este paralelogram şi diagonalele sale se taie în părţi egale, adică HD trece prin M.

2) $AH = 2OM$. Din demonstraţia precedentă rezultă că M este mijlocul lui HD, deci OM uneşte mijloacele laturilor HD, AD, prin urmare, $AH = 2OM$.

3) Notînd $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ şi $AA' = h_a$, avem relaţia

$$bc = 2Rh_a.$$

Într-adevăr, triunghiurile dreptunghice ABA' şi ADC au unghiurile ascuţite $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ADC = \frac{1}{2}$ măs. $\widehat{AC}$, prin urmare, $\triangle ABA' \sim \triangle ADC$. Rezultă

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AA'}{AC} \quad \text{sau} \quad \frac{c}{2R} = \frac{h_a}{b} \Rightarrow bc = 2Rh_a.$$

4) C o n s e c i n ţ ă. Înmulţind relaţia precedentă cu a, se obţine $abc = 2Rah_a$, dar $ah_a = 2S$, astfel că rezultă formula cunoscută

$$abc = 4RS.$$

5) *Simetricele ortocentrului H în raport cu laturile triunghiului ABC se găsesc pe cercul circumscris.*

În patrulaterul inscriptibil $AB'HC'$ $(\widehat{B'} = \widehat{C'} = 90°)$ avem $\sphericalangle B'HC' = 180° - \widehat{A} \Rightarrow \sphericalangle BHC = 180° - \widehat{A}$. Așadar arcul de cerc $\overset{\frown}{BHC}$ este capabil de unghiul $180° - \widehat{A}$. Dar și $\overset{\frown}{BDC}$ este capabil tot de $180° - \widehat{A}$, față de același segment BC, deci arcul $\overset{\frown}{BDC}$ este simetricul lui $\overset{\frown}{BHC}$ față de BC. Atunci simetricul lui H trebuie să se afle pe arcul simetric, adică în H_1 pe cercul ABC.

Demonstrația este analoagă pentru simetricele în raport cu celelalte laturi.

6) *Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC (punctul de concurență al bisectoarelor) și A_1 punctul în care bisectoarea AI taie din nou cercul circumscris. Să se demonstreze că $A_1B = A_1I = A_1C$.*

Întîi se va observa că dacă AA_1 este bisectoare (fig. 2.8), atunci $\overset{\frown}{A_1B} = \overset{\frown}{A_1C} \Rightarrow A_1B = A_1C$. Rămîne de demonstrat că $A_1B = A_1I$ sau că triunghiul A_1BI este isoscel. Într-adevăr, notînd cu B_1 mijlocul arcului AC, $\sphericalangle A_1BI = \frac{1}{2}$ măs. $(\overset{\frown}{A_1C} + \overset{\frown}{CB_1}) = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ și $\sphericalangle A_1IB = \frac{1}{2}$ măs. $(\overset{\frown}{A_1B} + \overset{\frown}{AB_1}) = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$, deci $\sphericalangle A_1BI = \sphericalangle A_1IB$. Triunghiul A_1BI este isoscel, cu baza $BI \Rightarrow A_1B = A_1I$.

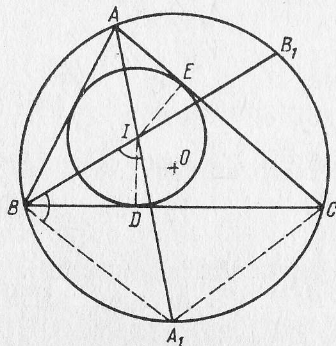


Fig. 2.8

În cele ce urmează dăm două aplicații ale proprietăților precedente.

Problema 8. *Se cere locul geometric al ortocentrului H al unui triunghi ABC, știind că latura BC este fixă, în ipotezele:*
a) $\widehat{A}$ este constant;
b) vîrful A descrie cercul (O) circumscris triunghiului ABC.

Rezolvare. Problema se poate trata în mai multe moduri, de exemplu observînd că dacă $\widehat{A}$ = const, atunci $\sphericalangle BHC = 180 - \widehat{A}$ este de asemenea constant și H se mișcă pe cercul BHC etc.

Vom alege însă altă cale care ni se pare mai simplă și mai ales ușurează delimitarea locului, cînd este cazul.

Fie M mijlocul laturii BC. Avem $AH = 2OM$ = const (proprietatea 2).

a) Deoarece $\widehat{A}$ = const, vîrful $A \in \overset{\frown}{BAC}$ (nu considerăm și arcul simetric). Din fiecare punct A obținem pe H dacă luăm $AH = 2OM$ = const, deci H se obține din A printr-o translație de vector $2\overrightarrow{OM}$. Rezultă că locul geometric al lui H se obține din arcul BAC, dîndu-i o translație definită de același vector. Punctele B, C vin respectiv în H_b, H_c astfel că $\overrightarrow{BH_b} = \overrightarrow{CH_c} = 2\overrightarrow{OM}$ (fig. 2.9), iar O vine în O' și deoarece $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OM}$, centrul O' al cercului translatat este simetricul lui O față de BC. Așadar, locul descris de ortocentrul H este arcul de cerc $H_bHH_c \in (O')$, (O') fiind simetricul cercului (O) față de latura BC.

b) Dacă vîrful A descrie întreg cercul (O), circumscris lui ABC (deci $\widehat{A} = \alpha$ = const și $\widehat{A} = 180° - \alpha$), atunci locul geometric al lui H este întreg cercul (O') simetric cu (O) față de BC.

Problema 9. *Dîndu-se un triunghi oarecare ABC și notînd cu O centrul cercului său circumscris, cu I centrul cercului înscris, cu R și r razele acestor cercuri, să se arate că există relația (Euler)*

$$OI^2 = R(R - 2r).$$

Fig. 2.9

R e z o l v a r e. Fie E proiecţia lui I pe AC, deci $IE = r$ (fig. 2.8). Avem

$$AI = \frac{IE}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}. \qquad (2.1)$$

Apoi din triunghiul A_1AC teorema sinusurilor dă

$$\frac{A_1C}{\sin\frac{A}{2}} = 2R \Rightarrow A_1C = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

Dar (proprietatea 4)

$$A_1I = A_1C = 2R\sin\frac{A}{2}. \qquad (2.2)$$

Scriind puterea ρ a punctului I faţă de cercul (O) în două moduri diferite, avem

$$\rho = R^2 - OI^2 = IA \cdot IA_1$$

şi înlocuind pe IA, IA_1 din (2.1) şi (2.2), se deduce

$$R^2 - OI^2 = 2Rr \Rightarrow OI^2 = R(R - 2r).$$

O b s e r v a ţ i e. Deoarece prima parte este un pătrat, trebuie ca $R - 2r \geqslant 0$, adică $r \leqslant \frac{R}{2}$. Egalitatea are loc pentru triunghiul echilateral cînd $I \equiv O$.

2.5. **Patrulatere înscrise în cerc.** Patrulaterele inscriptibile s-au folosit şi în problemele precedente, pentru că aici materia se tratează sub forma unor lecţii de sinteză, nu urmărind strict capitolele din programă sau din manual.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un patrulater să fie inscriptibil se poate prezenta sub una din formele:

a) *două unghiuri opuse să fie suplimentare (să aibă suma egală cu 180°);*

b) *unghiul format de o diagonală cu una din laturi să fie egal cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.*

Iată şi unele aplicaţii.

Problema 10. *Prin punctele comune A, B a două cercuri (O_1), (O_2) se duc secantele arbitrare MAN şi PBQ $[M, P \in (O_1)]$. Să se demonstreze că $MP \parallel NQ$.*

R e z o l v a r e. Dacă se duce coarda comună AB, se formează patrulaterele înscrise în cele două cercuri: $MPBA$ şi $ABQN$. În baza proprietăţilor lor putem scrie $\widehat{M} = \widehat{B}_2$, avînd acelaşi supliment $\widehat{B}_1$ (fig. 2.10), apoi $\widehat{B}_2 + \widehat{N} = 180° \Rightarrow \widehat{M} + \widehat{N} = 180°$; deoarece cele două unghiuri sînt interne şi de aceeaşi parte a secantei MN, rezultă $MP \parallel NQ$.

Proprietate reciprocă. *Fie A, B punctele comune a două cercuri (O_1), (O_2). Prin A se duce o dreaptă care mai taie cercul (O_1) în M şi cercul (O_2) în N. Prin M şi N se duc două drepte paralele care taie din nou cercurile respective în P şi Q. Să se demonstreze că dreapta PQ trece prin B.*

Fig. 1.10

Demonstrația este simplă. Avem $\widehat{M} = \widehat{B}_1$ și $\widehat{N} = \widehat{B}_2$ (fig. 2.10). Dar $\widehat{M} + \widehat{N} = 180°$ (interne de aceeași parte a secantei), $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180°$, deci BP și BQ sînt în prelungire.

Consecință. Să facem acum ca $P \to M$. Secanta MP devine, la limită, tangenta în M la cerc și proprietatea se transformă în următoarea: *dacă se unește un punct* $M \in (O_1)$ *cu punctele* A *și* B *în care se taie cercurile* (O_1) *și* (O_2), *dreptele* MA *și* MP *taie cercul* (O_2) *în* N *și* R; *coarda* NR *este paralelă cu tangenta în* M *la cercul* (O_1).

Problema 11. *Un cerc* (O) *este tăiat de două cercuri* (O_1), (O_2) *respectiv în punctele* A, B *și* C, D. *Fie* $P \in (O)$. *Dreptele* PA, PB *taie din nou cercul* (O_1) *în* E *și* F, *iar dreptele* PC, PD *taie din nou cercul* (O_2) *în* G *și* H. *Să se demonstreze că* $EF \parallel GH$.

Demonstrația se reduce la a observa, pe baza problemei precedente, că atît EF, cît și GH sînt paralele cu tangenta în P la cercul (O).

Dacă însă nu am fi folosit problema precedentă, atunci demonstrația ar fi trebuit să se facă direct, cu ajutorul unghiurilor.

Pornind de la această ultimă problemă, ne putem pune unele întrebări care, studiate, pot constitui un început de cercetare personală.

Problema 12. *Presupunînd date cercurile* (O), (O_1), (O_2), *deci și punctele* A, B, C, D, *să se determine punctul* $P \in (O)$ *astfel ca* EF *și* GH *să fie pe aceeași dreaptă* *.

Rezolvare. Notațiile sînt aceleași ca la problema 11. Să observăm că paralelismul lui EF cu tangenta în P la cercul (O) ne dă $\sphericalangle PEF = \sphericalangle(PF$, tangenta în $P)$ ca alterne interne și $\sphericalangle(PE$, tangenta în $P) = \sphericalangle PDA$, avînd aceeași măsură, pe cerc, deci $\sphericalangle PEF = \sphericalangle PDA$. La fel se arată că $\sphericalangle PHG = \sphericalangle PAD$ (fig. 2.11).

* Rezolvarea acestei probleme cere noțiunea de axă radicală și cunoașterea proprietăților ei.

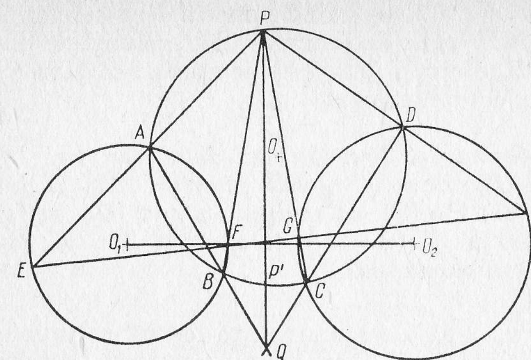


Fig. 2.11

Dacă EF și GH sînt pe aceeași dreaptă, atunci $EHDA$ este un patrulater inscriptibil, deoarece $\sphericalangle PHE = \sphericalangle PAD$. În consecință, $PA \cdot PE = PD \cdot PH$, deci P se află pe **axa** radicală a cercurilor (O_1) și (O_2).

Rezultă construcția: punctul $Q \equiv AB \cap CD$ are aceeași putere față de (O_1) și (O_2), deci aparține axei lor radicale (Δ), care se obține ducînd din Q perpendiculara pe O_1O_2. Intersecția axei radicale (Δ) cu cercul (O) dă în general două puncte P, P', dacă (Δ) este secantă față de (O).

Discuție. Presupunînd cercul (O_1) fix și punctele C, D de asemenea fixe, punctul Q este și acesta fix. Dar centrul O_2 se poate deplasa oriunde pe mediatoarea lui CD, deci linia centrelor O_1O_2 se rotește în jurul lui O_1, iar perpendiculara din Q pe O_1O_2 se rotește în jurul lui Q. Rezultă că:

a) axa radicală (Δ) poate fi secantă cercului (O), în care caz avem două soluții ale problemei (P și P');

b) (Δ) poate fi tangentă lui (O), în care caz avem o singură soluție (punctul de tangență);

c) dacă (Δ) nu taie cercul (O), problema nu are soluție.

Problema 13. *Referindu-ne la problema precedentă și presupunînd date cercul* (O), *cercul* (O_1) *și punctele* P, C, $D \in (O)$, *să se determine cercul* (O_2) *astfel ca* EF *și* GH *să fie pe aceeași dreaptă.*

R e z o l v a r e. Cunoscînd punctul P și cercul (O_1), deci pe A și B, EF este determinat. Se prelungește EF și fie $H \equiv EF \cap PD$. Cercul (O_2) trebuie să treacă prin C, D, H, deci este perfect determinat.

Problema 14. *Presupunînd date (vezi fig. 2.11) cercul (O), cercul (O_1), deci punctele A și B precum și punctul $P \in (O)$, să se ducă un cerc (O_2) astfel ca EF și GH să fie pe aceeași dreaptă. De cîți parametri depinde problema?*

R e z o l v a r e. Chestiunea este legată de problema 10. Luînd arbitrar punctul $D \in (O)$, se determină $H \equiv PD \cap EF$, apoi se duce un cerc arbitrar care trece prin D și H și care taie din nou cercul (O) în C. Rezultă $G \equiv EH \cap PC$.

Se observă că se introduce un parametru prin alegerea arbitrară a punctului $D \in (O)$; prin aceasta este determinat punctul H. Dar prin două puncte D și H trece o infinitate de cercuri, care depind de un parametru (centrul cercului aparține mediatoarei lui DH). Problema depinde de doi parametri.

2.6. **Poligoane regulate.** Se numește *poligon regulat* orice poligon care are toate laturile egale și de asemenea toate unghiurile egale între ele.

Poligoanele regulate pot fi convexe, concave, stelate.

Teoremă. *Fiind dat un cerc oarecare:* a) *se poate înscrie în acest cerc un poligon regulat convex cu un număr dat n de laturi;*

b) *se poate circumscrie acestui cerc un poligon regulat convex cu un număr dat de n laturi.*

Se pornește de la împărțirea cercului în n părți egale. Unind punctele de diviziune consecutive, se obține poligonul regulat înscris, iar ducînd tangentele în aceleași puncte, se obține poligonul regulat circumscris.

Demonstrația, pe care cititorul o poate face singur, constă în a dovedi că laturile obținute sînt toate egale și unghiurile de asemenea egale între ele. Mai importantă este

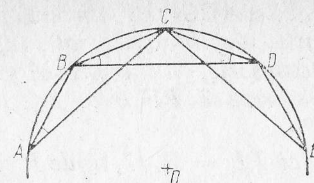


Fig. 2.12

Teoremă reciprocă. *Fiind dat un poligon regulat convex:*

a) *se poate circumscrie acestui poligon un cerc;*

b) *se poate înscrie acestui poligon un cerc.*

D e m o n s t r a ț i e. Considerăm conturul poligonal regulat $ABCDE$. Se știe că un cerc este perfect determinat de trei puncte nesituate în linie dreaptă. Prin urmare, punctele A, B, C determină cercul și rămîne să arătăm că celelalte aparțin acestui cerc (fig. 2.12).

În patrulaterul $ABCD$ avem $\triangle ABC = \triangle BCD$, ambele fiind isoscele cu laturile AB, BC, CD egale și unghiurile cuprinse între ele egale. Rezultă că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ și patrulaterul este inscriptibil, adică $D \in$ cerc (ABC). La fel se arată că $BCDE$ este inscriptibil, deci $E \in$ cerc $(BCD) \Rightarrow$ $\Rightarrow E \in$ cerc (ABC) etc.

Să se observe că nu am presupus că linia poligonală se închide, astfel că teorema este adevărată și pentru un poligon regulat convex și pentru o *linie poligonală convexă.*

b) Deoarece laturile poligonului sînt coarde *egale* în cerc, ele sînt egal depărtate de centru, deci tangente unui cerc cu raza OM, punctul M fiind mijlocul uneia dintre laturi. Așadar, există un cerc înscris în poligonul regulat dat.

Există metode grafice pentru *înscrierea în cerc* a principalelor poligoane regulate (deci și pentru *circumscriere*): a triunghiului echilateral, a pătratului, a hexagonului, a pentagonului, a decagonului etc.; o parte din ele figurează în manual și acelea se cer cunoscute la concursul de admitere în învățămîntul superior.

Iată și cîteva aplicații relativ la poligoanele regulate.

Problema 15. *Fie ABCDEF un hexagon regulat convex şi P punctul de intersecţie al tangentelor duse la cercul său circumscris, în punctele A şi C.*

a) *Să se demonstreze că PF trece prin mijlocul laturii AB.*

b) *Să se arate că $PF = R\sqrt{7}$, unde R este raza cercului circumscris.*

(Olimpiada 1955, G.M.F., seria B)

Rezolvare. a) Triunghiul PAC este evident isoscel (PA, PC sînt tangente la cerc), însă $\widehat{P} = \frac{1}{2}$ (măs. $\widehat{AEC}$ — — măs. $\widehat{ABC}$) $= \frac{240° - 120°}{2} = 60°$, deci $\triangle PAC$ este *echilateral*. Rezultă $PA = AC = BF$. Deoarece A este mijlocul arcului BF, avem $BF \perp OA$ (O fiind centrul cercului), dar şi $PA \perp OA \Rightarrow PA \parallel BF$. Deoarece PA şi BF sînt egale şi paralele, figura $PAFB$ este paralelogram şi PF trece prin mijlocul lui AB.

b) AC fiind latura triunghiului echilateral înscris, avem $AC = PC = R\sqrt{3}$. Din triunghiul dreptunghic PCF se deduce

$$PF = \sqrt{PC^2 + CF^2} = \sqrt{3R^2 + 4R^2} = R\sqrt{7}.$$

Problema 16. *În pentagonul regulat ABCDE se duc diagonalele AC, BE şi se notează $F \equiv AC \cap BE$. Dacă l_5 şi d_5 sînt latura şi diagonala pentagonului, să se arate că:*

a) $CF = EF = l_5$;

b) $\frac{1}{BF} = \frac{1}{l_5} + \frac{1}{d_5}$;

c) *să se calculeze distanţa OF în funcţie de l_5, d_5 şi raza cercului circumscris R.*

Rezolvare. a) Vrem să arătăm că $CF = l_5 = CB$ (fig. 2.13), deci că triunghiul CBF este isoscel. Atunci trebuie să dovedim că unghiurile de la bază sînt egale, adică $\sphericalangle CBF = \sphericalangle CFB$. Este uşor de observat că $\sphericalangle CBF = \frac{1}{2}$ măs. $\widehat{CDE}$, adică este egal cu măsura unei diviziuni de cerc (72°); dar $\sphericalangle CFB = \frac{1}{2}$ măs. $(\widehat{BC} + \widehat{AE})$, adică tot o

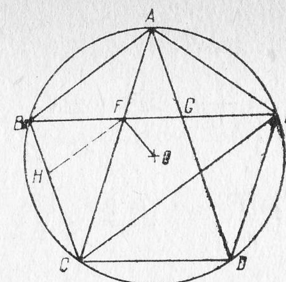


Fig. 2.13

diviziune de cerc. Rezultă că CBF este isoscel: $CF = l_5 = CB$. La fel se arată că $FE = AE = l_5$ sau se poate dovedi uşor că CFE este triunghi isoscel.

b) CF este bisectoarea unghiului BCE, deci în triunghiul BCE se poate scrie

$$\frac{FB}{BC} = \frac{FE}{CE} \quad \text{sau} \quad \frac{BF}{l_5} = \frac{FE}{d_5} = \frac{BF + FE}{l_5 + d_5} = \frac{d_5}{l_5 + d_5}.$$

Rezultă din primul şi ultimul raport:

$$BF = \frac{l_5 \cdot d_5}{l_5 + d_5} \Rightarrow \frac{1}{BF} = \frac{1}{l_5} + \frac{1}{d_5}.$$

Altfel. $ABCE$ este trapez isoscel, iar F intersecţia diagonalelor. Ducem $FH \parallel AB$ ($H \in BC$). Potrivit proprietăţii 3 din 1.7, avem

$$\frac{1}{FH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{l_5} + \frac{1}{d_5}.$$

Dar triunghiul BCE este isoscel, deci şi $\triangle BHF$ este isoscel, cu $FH = BF$ şi proprietatea este dovedită.

c) În triunghiul isoscel FAB mediana din F este şi mediatoarea laturii AB, deci trece prin centrul O al cercului circumscris pentagonului şi trece de asemenea prin D. Să notăm $G \equiv AD \cap BE$. La fel se arată că GO trece prin C, prin urmare, în trapezul $CDGF$ diagonalele FD şi GC se inter-

sectează în O și se împart [proprietatea 2 din 1.7] într-un raport egal cu raportul bazelor. Rezultă

$$\frac{FO}{OD}=\frac{FG}{CD}\Rightarrow OF=R\cdot\frac{FG}{l_5}.$$

Însă

$$FG=BE-2BF=d_5-2\cdot\frac{l_5d_5}{l_5+d_5}=d_5\cdot\frac{d_5-l_5}{d_5+l_5}$$

și înlocuind, găsim

$$OF=R\cdot\frac{d_5}{l_5}\cdot\frac{d_5-l_5}{d_5+l_5}$$

sau, dacă punem $\frac{d_5}{l_5}=k$,

$$OF=k\cdot\frac{k-1}{k+1}\cdot R.$$

Observație. De fapt d_5 este latura pentagonului regulat stelat și expresia ei este cunoscută, ca și a lui l_5. Raportul k are valoarea $(\sqrt{5}+1)/2$.

2.7. Chestiunea asupra căreia vrem să mai insistăm este aceea a calculului laturii poligonului cu *număr dublu de laturi* față de un poligon dat.

Fie $AB=l_n$ latura poligonului înscris cu n laturi (fig. 2.14). Ducem diametrul $OMA'\perp AB$, în care M este mij-

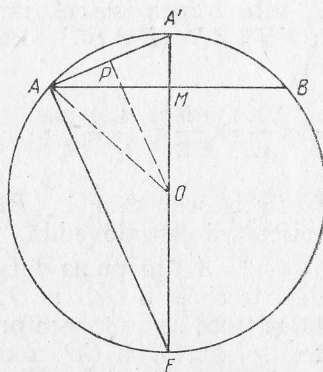


Fig. 2.14

locul coardei AB și A' mijlocul arcului AB. Este clar că $AA'=l_{2n}$. Pentru calcul considerăm și diametralul opus E al lui A'. În triunghiul dreptunghic $AA'E$ teorema catetei ne dă

$$AA'^2=A'E\cdot A'M=2R(R-OM),$$

dar

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{R^2-\frac{l_n^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}.$$

Rezultă

$$AA'=l_{2n}=\sqrt{R(2R-\sqrt{4R^2-l_n^2})}. \qquad (2.1)$$

Să se observe că se mai poate scrie

$$\sqrt{2R-\sqrt{4R^2-l_n^2}}=\sqrt{R+\frac{l_n}{2}}-\sqrt{R-\frac{l_n}{2}},$$

deoarece este îndeplinită condiția $A^2-B=C^2$, pentru ca radicalul dublu să se scrie ca o sumă (diferență) de radicali simpli. În cazul nostru $C=l_n$. Prin urmare, se mai poate scrie

$$AA'=l_{2n}=\sqrt{R}\left(\sqrt{R+\frac{l_n}{2}}-\sqrt{R-\frac{l_n}{2}}\right). \qquad (2.1')$$

În ceea ce privește apotema, se va observa că $a_{2n}=\frac{1}{2}AE$, deci

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_{2n}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{R(2R+\sqrt{4R^2-l_n^2})}, \qquad (2.2)$$

care se mai poate pune sub forma

$$a_{2n}=\sqrt{R}\left(\sqrt{R+\frac{l_n}{2}}+\sqrt{R-\frac{l_n}{2}}\right). \qquad (2.2')$$

Formulele (2.1), (2.1'), (2.2), (2.2') sînt importante pentru că permit ca pornind de la triunghiul echilateral, pătrat, hexagon etc. să obținem latura octogonului, a dodecagonului etc., precum și apotemele lor, deci și expresiile ariilor corespunzătoare.

Din punct de vedere practic, uneori este mai convenabil să folosim formulele (2.1), (2.2), alteori formulele (2.1′), (2.2′). De exemplu, pentru a calcula latura hexagonului, pornind de la triunghi, avem $l_3 = R\sqrt{3}$, care dus în (2.1) dă

$$l_6 = \sqrt{R(2R - R)} = R;$$

dacă vrem de la hexagon să trecem la dodecagon este mai convenabil să folosim (2.1′):

$$l_{12} = \sqrt{R}\left(\sqrt{\frac{3R}{2}} - \sqrt{\frac{R}{2}}\right) = R\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

Dacă folosim formula (2.1), obținem l_{12} cu radicali dubli:

$$l_{12} = \sqrt{R(2R - R\sqrt{3})} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

care se transformă imediat în cea precedentă.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. Se consideră două cercuri (O) și (O') cu centrele fixe O și O', de raze variabile R și R' astfel că $R + R' = \text{const.}$ Fie T și T' punctele de contact ale uneia din tangentele comune exterioare cu cele două cercuri. Se cere:

a) locul geometric al punctului M, mijlocul segmentului TT';

b) locul geometric al punctului P care împarte segmentul TT' în raportul $\frac{TP}{PT'} = k$.

2. Pe segmentul dat AB se ia un punct fix D. Se construiește arcul de cerc $\overset{\frown}{AMB}$ capabil de unghiul α, iar din D se duce o dreaptă care face cu AB unghiul α și care întîlnește arcul de cerc în M.

a) Care este locul geometric al lui M cînd unghiul α variază?

b) Să se determine locurile geometrice ale mijloacelor segmentelor MA și MB.

(S.G.M., 1935, nr. 9, pag. 133)

3. Pe segmentul dat AB se consideră punctul mobil M și se construiesc cercurile (O) și (O') de diametre AM și MB. Una dintre tangentele comune exterioare are punctele de contact cu cele două cercuri în T și T'. Cînd punctul M descrie segmentul AB, se cere:

a) locul geometric al punctului $P \equiv AT \cap BT'$;

b) să se arate că distanța d de la P la tangenta TT' este media armonică a razelor cercurilor (O) și (O').

4. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul (O) și se notează cu A', B', C' mijloacele arcelor BC, CA, AB.

a) Să se calculeze unghiurile triunghiului $A'B'C'$.

b) Să se demonstreze că bisectoarele triunghiului ABC sînt înălțimile triunghiului $A'B'C'$.

c) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și A'' punctul unde bisectoarea exterioară a unghiului A taie a doua oară cercul (O). Să se arate că IA'' trece prin mijlocul coardei $B'C'$.

5. Prin vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se duc paralele la laturile opuse; aceste paralele întîlnesc din nou cercul circumscris lui ABC, respectiv în A', B', C'. Să se demonstreze că:

a) mediatoarele triunghiului $A'B'C'$ trec prin vîrfurile triunghiului ABC;

b) laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt paralele cu laturile triunghiului ortic al lui ABC;

c) să se determine raportul de asemănare dintre triunghiul ortic al lui ABC și triunghiul $A'B'C'$.

6. Se consideră un patrulater oarecare $ABCD$ în care notăm cu E, F proiecțiile lui A pe CB, CD; cu G, H proiecțiile lui C pe AB, AD și în sfîrșit $P \equiv AE \cap CG$, $Q \equiv AF \cap CH$. Ce condiții trebuie să îndeplinească patrulaterul $ABCD$ pentru ca dreapta PQ să treacă prin mijlocul diagonalei BD? (A se vedea și problema propusă 5 din cap. 1.)

7. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și punctul interior I prin care se duc paralele la laturile dreptunghiului. Acestea întîlnesc laturile AB, BC, CD, DA respectiv în M, N, P, Q.

a) Ce relații trebuie să existe între unghiurile formate de dreptele care unesc punctul I cu vîrfurile dreptunghiului, pentru ca patrulaterul $MNPQ$ să fie inscriptibil?

b) Prin A și B se duce un cerc arbitrar cu centrul O. Se dă o translație acestui cerc, definită de vectorul $\overrightarrow{BC}$ și fie O' centrul cercului translatat. Cercurile (O) și (O') se intersectează în I și J. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ corespunzător punctului I (sau J) este inscriptibil. (Se presupune că I și J sînt interioare dreptunghiului.)

8. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex se construiesc în exterior semicercurile cu centrele O_1, O_2, O_3, O_4. Se ia pe semicercul (O_1) un punct arbitrar M. Dreapta MB taie semicercul (O_2) în N, dreapta NC taie semicercul (O_3) în P, iar dreapta PD taie semicercul (O_4) în Q.

a) Să se demonstreze că punctele Q, A, M sînt coliniare.

b) Dacă se construiesc și semicercurile interioare, să se arate că cercurile (O_1), (O_2) și (O_3), (O_4) se taie a doua oară în puncte situate pe diagonala AC; la fel (O_2), (O_3) și (O_4), (O_1) se taie în puncte situate pe diagonala BD.

9. Se dă un hexagon regulat $ABCDEF$ a cărui latură se notează cu l. Unind din două în două vîrfurile sale, întîi începînd din A, apoi începînd din B, se formează două triunghiuri echilaterale, care prin intersecțiile laturilor dau un alt hexagon regulat. Să se calculeze latura acestui hexagon regulat precum și lungimea segmentului AN, unde $N \equiv BD \cap CE$.

(Olimpiada 1955, G.M.F., seria B, 1956)

10. Într-un cerc se iau coardele AB, BC respectiv egale cu laturile triunghiului echilateral și a hexagonului regulat înscrise în cerc și se unesc mijloacele M și N ale arcelor AB, BC. Să se demonstreze că porțiunea din dreapta MN cuprinsă în unghiul ABC este egală cu latura dodecagonului regulat înscris în cerc.

3

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHI ȘI ÎN CERC. ARII, COMPARAREA ARIILOR

3.1. **Relațiile metrice** sînt o consecință a figurilor asemenea, indiferent că este vorba de relațiile din triunghiul dreptunghic, din triunghiul oarecare, patrulatere etc. sau de relațiile metrice în cerc.

3.2. **Triunghiul dreptunghic.** Reamintim aici relațiile de bază din triunghiul dreptunghic, pe care le vom folosi.

Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea sa AD (fig. 3.1). Laturile AB și AC sînt catetele, iar BC ipotenuza.

1) **Teorema înălțimii** rezultă din asemănarea triunghiurilor ABD și DAC, care au $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAD$ (laturile perpendiculare) și deci $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$.

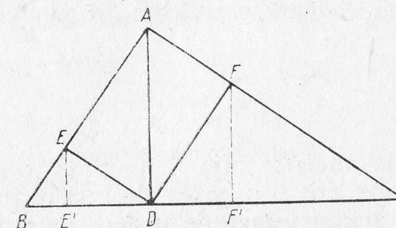


Fig. 3.1

2) **Teorema catetei.** Fiecare din triunghiurile ABD, CAD sînt asemenea cu triunghiul inițial ABC, de unde se deduc relațiile

$$AB^2 = BC \cdot BD; \qquad AC^2 = BC \cdot DC \qquad (3.1)$$

iar prin adunare **teorema lui Pitagora**

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

adică *suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.*

3) Împărțind relațiile catetelor (3.1), se deduce

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2},$$

adică *raportul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este egal cu raportul pătratelor acelor catete.*

4) Tot ca o consecință a asemănării unuia din triunghiurile determinate de înălțime (de exemplu ABD) cu triunghiul mare ABC, se deduce $\frac{AD}{AC} = \frac{AB}{BC}$ sau, folosind notațiile $AD = h$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$,

$$h = \frac{b \cdot c}{a} = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \qquad (3.2)$$

În acest fel se poate calcula *direct* înălțimea, cunoscînd laturile triunghiului dreptunghic (de fapt numai catetele). Relația (3.2) se poate obține însă și mai simplu exprimînd în două moduri diferite dublul ariei triunghiului:

$$2S = a \cdot h = b \cdot c \Rightarrow h = \frac{b \cdot c}{a}. \qquad (3.3)$$

5) Relația precedentă, scrisă sub forma $\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2}$, conduce la

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

3.3. Relațiile metrice din triunghiul dreptunghic sînt foarte des folosite atît din punct de vedere practic (calculul lungimilor) cît și din punct de vedere teoretic la stabilirea altor relații metrice, de exemplu teorema lui Pitagora generalizată, expresia laturii și apotemei unui poligon regulat cu număr dublu de laturi față de un poligon regulat dat, înscris în cercul de rază R (vezi 2.7) etc.

Problema 1. *În triunghiul dreptunghic ABC ($\widehat{A} = 90°$), D este piciorul înălțimii, iar E, F proiecțiile lui D respectiv pe catetele AB, AC. Să se demonstreze că avem relația*

$$\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3.$$

R e z o l v a r e. În triunghiurile dreptunghice ABD, ACD, folosind teorema catetei, putem scrie (fig. 3.1):

$$BD^2 = BE \cdot AB; \quad DC^2 = CF \cdot AC; \quad \frac{BD^2}{DC^2} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

Dar conform cu proprietatea 3,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{AB^4}{AC^4} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{AB}{AC},$$

de unde

$$\frac{BE}{CF} = \frac{AB^3}{AC^3}.$$

Altă metodă. Se poate folosi asemănarea perechilor de triunghiuri BDE, BCA și CDF, CBA. Cititorul va stabili, ca exercițiu, pe această cale relația cerută.

Problema 2. *Se dă un triunghi oarecare ABC. Se duce înălțimea AD, apoi se proiectează punctul D în E și F pe AB și AC. Să se demonstreze că*

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DC^2}{DB^2} = 1.$$

R e z o l v a r e. În triunghiurile dreptunghice ABD, ACD putem scrie (vezi proprietatea 3)

$$\frac{EB}{EA} = \frac{BD^2}{AD^2}; \quad \frac{FA}{FC} = \frac{AD^2}{DC^2},$$

care înmulțite dau

$$\frac{EB}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} = \frac{DB^2}{DC^2},$$

relația din enunț sub altă formă.

Problema 3. *Se dă trapezul isoscel ABCD cu baza mare $AB = 41$ cm, baza mică $CD = 15$ cm și înălțimea $h = 2\sqrt{30}$ cm. O perpendiculară pe baze taie pe AB și CD respectiv în M și N, iar semicercurile descrise (în exterior) pe AB și CD sînt tăiate respectiv în P și Q. Să se determine poziția acestei perpendiculare astfel ca înălțimea trapezului să fie media geometrică a segmentelor MP și NQ.*

(Olimpiada matematică, 1956)

Rezolvare. Triunghiurile APB, CQD sînt dreptunghice (înscrise în semicercuri). Notînd $CN = x$, $ND = y$, rezultă $x + y = 15$, $BM = x + 13$, $AM = y + 13$ (fig. 3.2). Relațiile din triunghiurile dreptunghice ne dau $NQ^2 = xy$; $MP^2 = (x + 13)(y + 13) = xy + 364$. Conform enunțului trebuie ca $MP \cdot NQ = h^2 = 120 \Rightarrow MP^2 \cdot NQ^2 = xy(xy + 364) = 120^2$ sau $(xy)^2 + 364(xy) - 120^2 = 0$, care dă $xy = -400$ (inacceptabilă) și $xy = 36$. Soluția problemei este dată de sistemul $x + y = 15$; $xy = 36$. Se deduce $x = 12$, $y = 3$ (sau invers). Poziția perpendicularei MN este determinată (sînt posibile două poziții simetrice față de axa de simetrie a trapezului, ceea ce era evident de la început, lucru care interesează însă mai puțin).

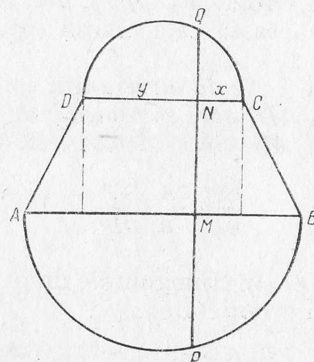


Fig. 3.2

3.4. Se numește *ceviană* o dreaptă care trece prin unul din vîrfurile unui triunghi. Lungimea unei ceviene este considerată de la vîrful triunghiului pînă la punctul unde întîlnește latura opusă; acest punct este *piciorul* cevienei.

Să observăm că într-un triunghi dreptunghic există *două ceviene* care sînt media geometrică a segmentelor determinate de acestea pe ipotenuză, anume:

a) *înălțimea AD* — teorema înălțimii;

b) *mediana AO*, deoarece $AO^2 = BO \cdot OC \quad \left(= \frac{BC^2}{4}\right)$.

Se poate ușor demonstra că cele două ceviene sînt *izogonale*, adică *fac unghiuri egale cu laturile care pleacă din același vîrf:* $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAO$. Facem această observare pentru problema asemănătoare care va fi pusă la triunghiul oarecare.

Prin analogie cu media geometrică ne propunem să facem următorul studiu.

Problema 4. *Să se cerceteze dacă există o ceviană AM a unui triunghi dreptunghic dat ABC ($\widehat{A} = 90°$), care să fie media armonică a segmentelor BM, MC pe care le determină pe ipotenuză, adică să avem*

$$\frac{2}{AM} = \frac{1}{BM} + \frac{1}{MC}.$$

(Gazeta Matematică, vol. XLIV, probl. 5039, noiembrie 1938)

Rezolvare. Notăm $\sphericalangle BAM = \alpha \Rightarrow \sphericalangle CAM = 90° - \alpha$. Aplicînd teorema sinusurilor triunghiurilor BAM și CAM, se deduce imediat (fig. 3.3):

$$BM = \frac{AM \sin\alpha}{\sin B}; \quad CM = \frac{AM \cos\alpha}{\cos B}.$$

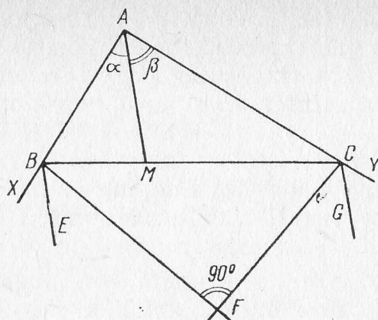


Fig. 3.3

Înlocuind în relația din enunț și înmulțind cu AM, rămîne

$$2 = \frac{\sin B}{\sin \alpha} + \frac{\cos B}{\cos \alpha},$$

adică ecuația

$$\sin 2\alpha = \sin (B + \alpha).$$

Soluțiile acestei probleme pentru $\alpha \subset \widehat{BAC}$ sînt:

1) $2\alpha = \widehat{B} + \alpha \Rightarrow \alpha = \widehat{B} \Rightarrow AM$ este mediana triunghiului, caz neinteresant. Dar trebuie să observăm că mediana din A a triunghiului dreptunghic este și medie aritmetică și medie geometrică și medie armonică a segmentelor determinate de aceasta pe ipotenuză.

2) $2\alpha = 180° - \widehat{B} - \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{180° - \widehat{B}}{3}$.

Aceasta este soluția care interesează. Dacă s-ar lua ca necunoscută $\sphericalangle CAM = \beta$ și s-ar reface calculul, s-ar găsi soluția sub forma $\beta = (180 - \widehat{C})/3$.

Notînd prelungirile laturilor AB, AC cu BX, CY și trisectoarele unghiului XBC cu BE, BF, iar trisectoarele unghiului YCB cu OG, CF (F fiind punctul comun), rezultă potrivit unghiului α găsit că $AM \parallel BE$, iar potrivit unghiului β că $AM \parallel CG \Rightarrow BE \parallel CG$. Așadar, două din trisectoarele unghiului XBC și YCB sînt paralele, iar *ceviana căutată AM este paralelă cu acestea.*

Deoarece trisectoarea unui unghi nu poate fi construită în general cu rigla și compasul, nici determinarea cevienei AM care satisface enunțul nu poate fi realizată cu o astfel de construcție.

Se poate ușor arăta că celelalte trisectoare BF, CF sînt perpendiculare, deoarece

$$\sphericalangle FBC + \sphericalangle FCB = \frac{180° - \widehat{B}}{3} + \frac{180° - \widehat{C}}{3} = \frac{270°}{3} =$$

$$= 90° \Rightarrow \widehat{F} = 90°.$$

3.5. **Triunghiul oarecare.** Considerăm cunoscută teorema lui Pitagora generalizată sub forma geometrică sau trigonometrică, pe care totuși le amintim.

Forma geometrică

$$\begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot \text{pr.}_{AC}AB = \\ = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot \text{pr.}_{AB}AC & \text{dacă } \widehat{A} < 90°, \\ BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot \text{pr.}_{AC}AB = \\ = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot \text{pr.}_{AB}AC & \text{dacă } \widehat{A} > 90°. \end{cases}$$

Forma trigonometrică: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$ sau $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, care înglobează ambele cazuri ale formulei geometrice.

Teorema lui Pitagora generalizată se folosește în foarte multe probleme, așa cum vom vedea; începem cu aplicații imediate.

I. **Reciproca teoremei lui Pitagora** de la triunghiul dreptunghic: *dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2$, triunghiul este dreptunghic în A.*

Referindu-ne la forma geometrică, trebuie ca $AC \cdot \text{pr.}_{AC}AB = 0$ sau $AB \cdot \text{pr.}_{AB}AC = 0 \Rightarrow \text{pr.}_{AC}AB = 0$, adică $AB \perp AC$ sau $\text{pr.}_{AB}AC = 0 \Rightarrow AC \perp AB$. Oricum rezultă $\widehat{A} = 90°$.

II. Dacă $BC^2 < AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{A}$ ascuțit.

III. Dacă $BC^2 > AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{A}$ obtuz.

3.6. **Calculul medianelor unui triunghi.** Considerăm triunghiul ABC, cu mediana AM și înălțimea AD (fig. 3.4). Teorema lui Pitagora generalizată, aplicată triunghiurilor ABM și ACM ne dă

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot DM;$$

$$AC^2 = CM^2 + AM^2 + 2MC \cdot DM.$$

Ținînd seama că $BM = MC = \frac{BC}{2}$ și adunînd aceste relații, obținem

$$AB^2 + AC^2 = \frac{BC^2}{2} + 2AM^2,$$

de unde

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}.$$

Dacă laturile unui triunghi se notează $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, iar medianele din A, B, C cu m_a, m_b, m_c, relațiile precedente se scriu

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2 \text{ și } m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \quad (3.4)$$

Relațiile care dau pe m_b^2, m_c^2 se deduc prin permutări circulare.

Din prima formă din (3.4) se vede că de cîte ori într-o problemă este vorba de suma pătratelor distanțelor de la un punct la două puncte oarecare (fixe sau nu) trebuie să ne gîndim la teorema medianei.

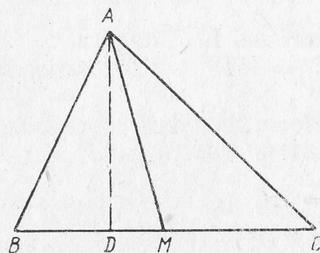


Fig. 3.4

3.7. În cele ce urmează dăm o serie de probleme care cer cunoașterea relațiilor metrice.

Problema 5. *În orice paralelogram suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor.*

R e z o l v a r e. Considerăm paralelogramul $ABCD$, cu unghiurile ascuțite în A și C, deci unghiurile $\widehat{B} = \widehat{D}$ sînt obtuze (fig. 3.5). Se observă că în triunghiul ABD diagonalei BD i se opune unghiul ascuțit $\widehat{A}$, iar în triunghiul ABC diagonalei AC i se opune unghiul obtuz $\widehat{B}$. Fie E, F proiecțiile vîrfurilor C și D pe dreapta AB. Scriind teorema lui Pitagora în cele două triunghiuri amintite, avem:

$$\left.\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AF \\ AC^2 &= AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BE \end{aligned}\right\} \text{ Adunăm și ținem seama că } AF = BE$$

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

Relația se mai poate scrie evident

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

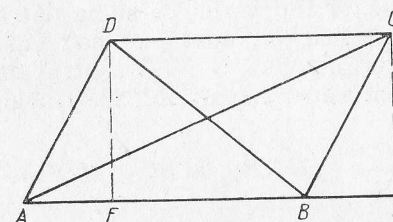


Fig. 3.5

Problema 6. *Se cere locul geometric al unui punct mobil M, care are suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe constantă.*

R e z o l v a r e. Notăm A, B punctele fixe, M punctul mobil, O mijlocul segmentului AB și k^2 constanta (evident > 0). Fiind vorba de suma pătratelor distanțelor, ne gîndim

imediat la teorema medianei. Potrivit enunțului (cititorul își va desena figura)

$$MA^2 + MB^2 = k^2, \quad \text{dar} \quad MA^2 + MB^2 = \frac{AB^2}{2} + 2MO^2,$$

deci

$$\frac{AB^2}{2} + 2MO^2 = k^2 \quad \text{sau} \quad MO^2 = \frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{AB^2}{2}\right) = \text{const.}$$

Locul geometric căutat este deci cercul cu centrul în O și cu raza $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$.

Condiția de posibilitate a problemei este $k > \frac{AB\sqrt{2}}{2}$.

Problema 7. *Pentru orice dreptunghi $ABCD$ și un punct oarecare M din planul dreptunghiului sau din spațiu, să se arate că există relația*

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Rezolvare. Fiind vorba de suma pătratelor distanțelor la două puncte, ne gîndim la teorema medianei (cititorul își va desena figura). Avem, O fiind centrul dreptunghiului și M un punct oarecare al spațiului, în triunghiurile MAC, MBD:

$$MA^2 + MC^2 = \frac{AC^2}{2} + 2MO^2; \quad MB^2 + MD^2 = \frac{BD^2}{2} + 2MO^2.$$

Dar diagonalele dreptunghiului sînt egale ($AC = BD$), deci

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Proprietatea este caracteristică dreptunghiului. Într-adevăr, *reciproc*, dacă presupunem că $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$, din expresiile lor de mai înainte se deduce, *dacă diagonalele au același mijloc O*, că $AC = BD$. Dar paralelogramul cu diagonalele egale este dreptunghi.

Problema 8.

a) *Se dau două segmente egale $A_1A_2 = B_1B_2$. Să se găsească locul geometric al punctului M care satisface relația*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2.$$

Rezolvare. În relația din enunț apare suma pătratelor distanțelor la două puncte fixe, deci folosim teorema medianei în triunghiurile MA_1A_2, MB_1B_2. Dacă A_0 și B_0 sînt mijloacele celor două segmente, putem scrie (fig. 3.6)

$$2MA_0^2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2 = 2MB_0^2 + \frac{1}{2}B_1B_2^2 \qquad (3.5)$$

și deoarece prin enunț $A_1A_2 = B_1B_2$, se deduce

$$MA_0 = MB_0.$$

Locul geometric căutat este deci *mediatoarea segmentului* A_0B_0 care unește mijloacele segmentelor date.

Să observăm însă că locul geometric *rămîne același* în condiții foarte largi ale problemei: a) segmentele se pot roti oricum în jurul mijloacelor A_0, B_0; b) mărimile lor pot varia, cu condiția ca ele să rămînă egale între ele.

În particular, dacă $A_0 = B_0$, A_1A_2 și B_1B_2 sînt diagonalele unui dreptunghi, iar egalitatea (3.5), deci și cea din enunț, are loc întotdeauna. Regăsim, ca un caz particular, proprietatea dreptunghiului, din problema a VII-a.

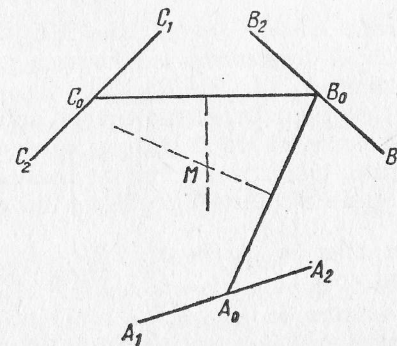


Fig. 3.6

b) *Se dau* **trei** *segmente egale* $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$. *Să se cerceteze dacă există puncte* M *astfel ca*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2 = MC_1^2 + MC_2^2. \quad (3.6)$$

Rezolvare. Notăm A_0, B_0, C_0 mijloacele celor trei segmente egale. Dacă luăm primele două sume, punctul M care le satisface se află pe mediatoarea lui A_0B_0; dacă luăm segmentele B_1B_2, C_1C_2, relația corespunzătoare cere ca M să fie pe mediatoarea lui B_0C_0. Prin urmare, pentru ca M să satisfacă egalitățile (3.6), M trebuie să se găsească la intersecția mediatoarelor segmentelor A_0B_0 și B_0C_0, pentru ca $MA_0 = MB_0 = MC_0$. În concluzie: 1) dacă mijloacele A_0, B_0, C_0 sînt *coliniare*, mediatoarele sînt paralele și *problema nu are soluție*; 2) dacă A_0, B_0, C_0 nu sînt coliniare, M este centrul cercului circumscris triunghiului $A_0B_0C_0$, deci problema are *soluție unică*.

Observație. Ca în cazul a), segmentele *rămînînd egale* și *avînd mijloacele fixe* A_0, B_0, C_0, acestea pot avea *orice mărime și orice direcție*; punctul M rămîne același.

c) *Dacă se iau în considerare* **patru** *segmente egale* $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2$, *atunci pentru ca*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2 =$$
$$= MC_1^2 + MC_2^2 = MD_1^2 + MD_2^2$$

ar trebui ca $MA_0 = MB_0 = MC_0 = MD_0$, *adică mijloacele segmentelor să formeze patrulaterul inscriptibil* $A_0B_0C_0D_0$.

În afară de acest caz problema nu are soluție.

Este evident acum că dacă luăm și alte segmente egale cu cele precedente, condiția rămîne ca toate mijloacele lor să fie pe un același cerc. Altfel problema nu are soluție.

Transpunerea în spațiu a problemei

a) *Dîndu-se două segmente egale* $A_1A_2 = B_1B_2$, *așezate oricum în spațiu, se cere locul geometric al punctului* M *care satisface relația*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2.$$

Rezolvare. Raționînd la fel ca în cazul geometriei plane, se obține relația (2), din care se deduce $MA_0 = MB_0$. Punctele din spațiu care au distanțele egale pînă la două puncte fixe A_0, B_0 se găsesc în planul mediator ($\perp A_0B_0$ și trecînd prin mijlocul său) al segmentului A_0B_0.

Locul geometric cerut este deci *planul mediator al segmentului determinat de mijloacele segmentelor date.*

b) *Dacă se consideră trei segmente egale* $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, *care este mulțimea punctelor* M, *care satisfac relațiile*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2 = MC_1^2 + MC_2^2? \quad (3.7)$$

Rezolvare. Mijloacele segmentelor A_0, B_0, C_0 formează în general un triunghi. Egalitatea $MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2$ este satisfăcută dacă M aparține planului mediator (P_1) al lui A_0B_0, iar egalitatea $MB_1^2 + MB_2^2 = MC_1^2 + MC_2^2$, dacă M aparține planului mediator (P_2) al lui B_0C_0. Prin urmare, trebuie ca $M \in (P_1) \cap (P_2)$.

1) Dacă A_0, B_0, C_0 sînt coliniare, problema nu are soluție, deoarece planele mediatoare sînt paralele.

2) Dacă A_0, B_0, C_0 nu sînt coliniare, planele mediatoare ale laturilor triunghiului format de ele se întîlnesc după o aceeași dreaptă $\Delta \perp$ pl. $(A_0B_0C_0)$. Fie $O \equiv \Delta \cap$ pl.$(A_0B_0C_0)$, deci $OA_0 = OB_0 = OC_0$; O este centrul cercului circumscris triunghiului $A_0B_0C_0$. Prin urmare, în acest caz mulțimea punctelor M (locul geometric) este perpendiculara pe planul triunghiului $A_0B_0C_0$, dusă prin centrul cercului său circumscris.

c) *Dacă se consideră patru segmente egale* $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2$, *avînd mijloacele* A_0, B_0, C_0, D_0, *și relațiile*

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2 = \ldots = MD_1^2 + MD_2^2, \quad (3.8)$$

avem cazurile:

1) Dacă A_0, B_0, C_0, D_0 sînt *coplanare*, problema în general *nu admite nici o soluție*, dar dacă A_0, B_0, C_0, D_0 *aparțin aceluiași cerc*, problema admite

o infinitate de soluții : toate punctele $M \in \Delta$, unde Δ este perpendiculara pe planul cercului, dusă prin centrul său.

2) Dacă A_0, B_0, C_0, D_0 nu sînt coplanare, ele pot fi considerate ca vîrfuri ale unui tetraedru. Dar se știe — și se poate ușor demonstra — că cele *șase* plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun care este centrul sferei circumscrise tetraedrului. Prin urmare, în acest caz există *un singur punct M* pentru care relațiile (3.8) din enunț sînt satisfăcute, anume centrul sferei determinate de mijloacele A_0, B_0, C_0, D_0 ale segmentelor date.

d) Dacă se dau mai mult de patru segmente egale, problema nu are soluție, *afară de cazul cînd mijloacele* A_0, B_0 etc. *ale segmentelor date se află pe o sferă, iar punctul M este centrul acestei sfere.*

Problema 9. *Să se demonstreze că în orice patrulater ABCD suma pătratelor laturilor este egală cu suma pătratelor diagonalelor, plus de patru ori pătratul segmentului care unește mijloacele diagonalelor.*

D e m o n s t r a ț i e. Pentru ușurarea scrisului vom nota $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, apoi diagonalele $AC = \delta$, $BD = \delta'$. În triunghiurile ABC, ADC, medianele din B și din D sînt BM, DM, deci putem scrie (fig. 3.7):

$$BM^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - \delta^2}{4}, \quad DM^2 = \frac{2(c^2 + d^2) - \delta^2}{4}.$$

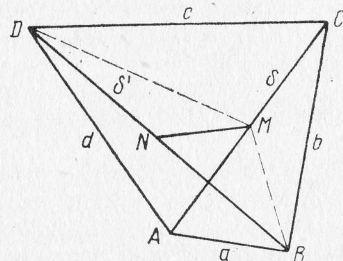


Fig. 3.7

În triunghiul BMD scriem relația corespunzătoare pentru mediana $MN = \lambda$:

$$MN^2 = \frac{2(BM^2 + DM^2) - \delta'^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - \delta^2 - \delta'^2}{4},$$

deci

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \delta^2 + \delta^{2\prime} + 4\lambda^2. \quad (3.9)$$

Cazuri particulare

I. *Presupunem că mijloacele diagonalelor coincid, adică ABCD este paralelogram*, Rezultă $\lambda = 0$, deci

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \delta^2 + \delta'^2,$$

adică problema 5.

II. *Presupunem că ABCD este un trapez cu bazele* $AB = a$ *și* $CD = c$. Se știe că $\lambda = MN = \frac{a - c}{2}$. Înlocuind în (3.9), rezultă

$$b^2 + d^2 = \delta^2 + \delta'^2 - 2ac \Rightarrow \delta^2 + \delta'^2 = b^2 + d^2 + 2ac,$$

adică *într-un trapez suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor neparalele, plus de două ori produsul bazelor.*

Iată deci exemple de particularizări interesante.

Problema 10. *Să se demonstreze că dacă punctele A, B, C sînt coliniare, în această ordine, iar O nu aparține dreptei (ABC), atunci există relația*

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC.$$

(*Stewart*)

D e m o n s t r a ț i e. Rezolvarea se aseamănă întru totul cu aceea de la teorema medianei din 3.6. Fie D proiecția lui O pe dreapta ABC (fig. 3.8). Teorema lui Pitagora generalizată, aplicată triunghiurilor OAB, OBC ne dă ($\sphericalangle ABO$ ascuțit):

$$\begin{array}{l|l} OA^2 = OB^2 + AB^2 - 2AB \cdot DB & BC \\ OC^2 = OB^2 + BC^2 + 2BC \cdot DB & AB \end{array}$$

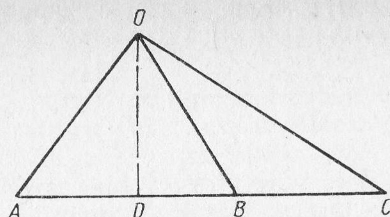


Fig. 3.8

Între aceste două relații se elimină DB, de care nu avem nevoie, înmulțind prima cu BC, pe a doua cu AB și adunînd. Rezultă

$$OA^2 \cdot BC + OC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC(AB + BC),$$

de unde

$$OA^2 \cdot BC - OB^2 \cdot AC + OC^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot AC.$$

Caz particular. Dacă $AB = BC = \frac{AC}{2}$, se obține teorema medianei, tratată mai înainte direct.

Aplicație. *Lungimea bisectoarei interioare a unui triunghi.* În triunghiul ABC de laturi a, b, c, ducînd bisectoarea AA' (figura se poate face cu ușurință), putem scrie:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BA'}{c} = \frac{A'C}{b} = \frac{a}{b+c},$$

de unde rezultă

$$BA' = \frac{ac}{b+c}, \quad A'C = \frac{ab}{b+c}.$$

Scriind relația lui Stewart, avem

$$AB^2 \cdot A'C - AA'^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BA' = BA' \cdot A'C \cdot BC$$

sau

$$c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} - AA'^2 \cdot a + b^2 \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \cdot a,$$

de unde

$$AA'^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}.$$

Însă $a + b + c = 2p$; $b + c - a = 2(p - a)$, astfel că

$$AA' = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}.$$

Celelalte bisectoare se deduc prin permutări circulare.

3.8. **Relații metrice în cerc.** La baza relațiilor metrice în cerc stă tot asemănarea. Dintre relațiile metrice într-un cerc două au o importanță deosebită, prin varietatea aplicațiilor lor: *teorema lui Ptolemeu* (care nu figurează în programa școlară și deci trecem peste ea) și *puterea punctului față de cerc.* Sînt apoi o mulțime de probleme legate de coardele, tangentele etc. ale unui cerc, sau ale unei mulțimi formate din *două, trei* sau *mai multe cercuri.*

Începem prin a reaminti, fără să intrăm în amănunte, puterea unui punct față de un cerc.

a) *Punctul exterior cercului.* Dintr-un punct P exterior cercului (0) se duc secantele PAB, PMN [$A, B, M, N \in (O)$]. Avem $PA \cdot PB = PM \cdot PN = ... =$ const, adică *produsul celor două segmente de la punctul exterior pînă la punctele de intersecție cu cercul este constant.* Această constantă se numește *puterea punctului P față de cercul (O).*

Demonstrația se face cu triunghiurile asemenea PAM, PBN. Dacă M și N coincid în punctul de tangență T, atunci, notînd cu ρ puterea punctului, avem

$$\rho = PA \cdot PB = PT^2 = PO^2 - OT^2,$$

deci

$$\rho = PT^2 = d^2 - R^2 \qquad (PO = d).$$

Puterea punctului exterior este măsurată prin pătratul tangentei la cerc sau prin expresia $d^2 - R^2 > 0$.

b) *Punctul interior cercului.* Dacă prin punctul I interior cercului se duc două coarde AIB, CID, se demonstrează cu ajutorul triunghiurilor asemenea că $IA \cdot IB = IC \cdot ID$; dacă se mai duce altă coardă EIF, atunci $IA \cdot IB = IE \cdot IF$ etc., astfel că *produsul segmentelor determinate pe fiecare*

coardă de punctul I este constant și se numește *puterea punctului I față de cercul* (O). Se va observa că în acest caz segmentele IA, IB au sensuri contrarii, deci puterea este negativă.

Dacă se duce coarda minimă EIF ($\perp OI$), atunci puterea punctului I este

$$\rho = IE \cdot IF = -IE^2 = -(OE^2 - OI^2),$$

deci

$$\rho = d^2 - R^2 < 0.$$

Pentru punctul interior puterea în valoare absolută este

$$|\rho| = R^2 - d^2 > 0.$$

c) *Puterea unui punct de pe cerc în raport cu cercul este nulă.* Este de observat că puterea unui punct față de un cerc dat nu depinde decît de distanța de la acel punct la centrul cercului, în toate cazurile.

Rezultă imediat că *locul geometric al punctelor care au aceeași putere* (ρ = const) *față de un cerc* (O) *este un cerc concentric cu* (O), exterior sau interior acestuia.

Dăm în cele ce urmează cîteva probleme în care intervin relații metrice în legătură cu cercul.

Problema 11. *Se dau trei puncte în linie dreaptă P, A, B, în această ordine. Se cere locul geometric al punctelor de contact al tangentelor duse din P la mulțimea cercurilor ce trec prin A și B.*

Rezolvare. Cercurile care trec prin A și B au centrele pe mediatoarea segmentului AB. Fie (ω) unul dintre aceste cercuri și T, T' punctele de contact ale tangentelor duse din P la (ω). Avem $PT^2 = PT'^2 = PA \cdot PB$ = const, deci punctele T, T' se găsesc pe cercul (P) cu centrul în P și cu raza $\sqrt{PA \cdot PB}$. Să notăm T_0, T_0' punctele unde acest cerc taie dreapta AB (fig. 3.9). Este clar că acestea sînt puncte limită și nu aparțin vreunui cerc ce trece prin A și B, deci nu satisfac enunțul problemei. În concluzie, locul geometric al punctelor de contact T, T' al tangentelor duse din P la mulțimea cercurilor ce trec prin A și B este cercul (P) din care se scoate $\{T_0, T_0'\}$.

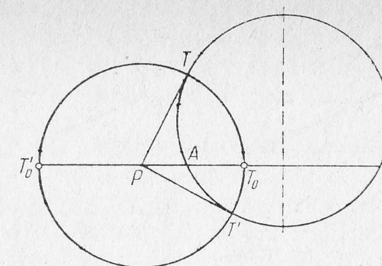


Fig. 3.9

Problema 12.

a) *Se dă un triunghi ABC avînd* $\widehat{A} > 90°$. *Se cere să se construiască pe latura BC punctele M pentru care avem*

$$AM^2 = BM \cdot MC.$$

Să se arate că există totdeauna două soluții M_1, M_2, *iar* AM_1 *și* AM_2 *sînt ceviene izogonale.*

b) *Fără a mai ține seama de condiția* $\widehat{A} > 90°$, *să se construiască un triunghi în care cele două puncte* M_1, M_2 *să fie confundate. Să se demonstreze că într-un astfel de triunghi*

$$b + c = a\sqrt{2},$$

a, b, c fiind laturile triunghiului.

(Concursul Gazetei Matematice 1946, enunț parțial)

Rezolvare. a) Luăm simetricul N al lui A față de M, deci relația din enunț se poate scrie (fig. 3.10, *a*)

$$AM \cdot MN = BM \cdot MC.$$

Dacă ducem cercul circumscris triunghiului ABC, partea a doua a egalității reprezintă puterea punctului M față de cerc, deci $AM \cdot MN$ trebuie să reprezinte de asemenea puterea punctului M față de cerc, prin urmare $N \in$ cerc (ABC). Rezultă construcția cerută: prin N se duce paralela la BC, care taie cercul în N_1 și N_2; dacă $M_1 \equiv AN_1 \cap BC$ și $M_2 \equiv AN_2 \cap BC$, soluțiile problemei sînt AM_1 și AM_2, deoarece $AM_1 \cdot M_1N = AM_1^2 = BM_1 \cdot M_1C$ etc.

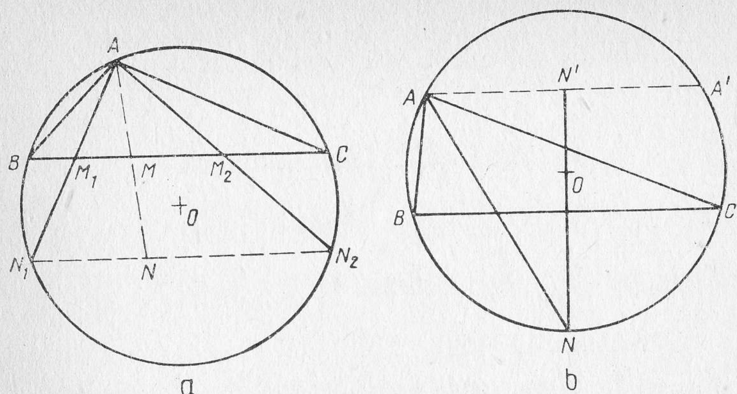


Fig. 3.10

Arcele $\widehat{BN_1}$ și $\widehat{CN_2}$, cuprinse între coarde paralele, sînt egale și deci $\sphericalangle BAM_1 = \sphericalangle CAM_2$, adică AM_1 și AM_2 sînt izogonale.

b) Dacă $M_1 \equiv M_2 \equiv M$, atunci și $N_1 \equiv N_2 \equiv N$ și aceasta este posibil numai dacă N este mijlocul arcului BC, deci AN este bisectoarea unghiului A (fig. 3.10, *b*). Construcția unui astfel de triunghi se poate face astfel: în cercul (O) se duce coarda BC, se determină mijlocul N al arcului BC și simetricul N' al lui N față de BC; prin N' se duce paralela la BC care taie cercul în A și A'. Soluțiile sînt triunghiurile ABC și $A'BC$ simetrice față de mediatoarea NN' a lui BC.

Potrivit enunțului trebuie ca bisectoarea AM să fie medie geometrică între segmentele AM și MB, deci

$$AM^2 = AM \cdot MB.$$

Lungimea bisectoarei a fost calculată la problema 10 (aplicația), iar segmentele AM, MB tot acolo, deși expresiile lor ar trebui să fie cunoscute. Înlocuind în egalitatea precedentă, obținem

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}; \quad (b+c)^2 = 2a^2$$

și

$$b + c = a\sqrt{2}.$$

Problema 13. *Se dă o dreaptă* (Δ) *și două puncte* A, B *așezate de aceeași parte față de aceasta. Să se construiască un cerc care să treacă prin punctele date* A, B *și să fie tangent dreptei* (Δ).

Rezolvare. a) Presupunem problema rezolvată și notăm cu T punctul de tangență cu (Δ) și cu $P \equiv AB \cap (\Delta)$. Scriind puterea punctului față de cerc, avem $PT^2 = PA \cdot PB$ (fig. 3.11). Pentru determinarea lui PT ducem prin A și B un cerc oarecare, eventual cercul de diametru AB, apoi construim una din tangentele PU la acest cerc. Deoarece $PU^2 = PA \cdot PB$, rezultă $PT = PU$ cunoscut. Dealtfel, PT se poate construi grafic prin orice metodă care dă media geometrică a două segmente, de exemplu prin teorema înălțimii sau a catetei într-un triunghi dreptunghic.

b) *Construcția grafică.* Se duce un cerc oarecare ce trece prin A și B (pe figură cercul cu diametrul AB) și PU tangentă acestui cerc. Cercul cu centrul P și raza PU taie dreapta (Δ) în două puncte T, T', punctele de tangență (deci două soluții). Centrele cercurilor căutate se află la intersecțiile mediatoarei segmentului AB cu perpendicularele pe (Δ), duse prin T și T'. Fie O_1 și O_2 aceste centre; cercurile cu razele O_1A și O_2A sînt soluțiile problemei deoarece trec prin A și B și sînt tangente dreptei (Δ) în T și T'.

c) *Discuție.* 1) Condiția de posibilitate a problemei este ca punctele A, B să fie de aceeași parte față de dreapta (Δ). Dacă ele sînt de o parte și alta, atunci orice cerc ce trece

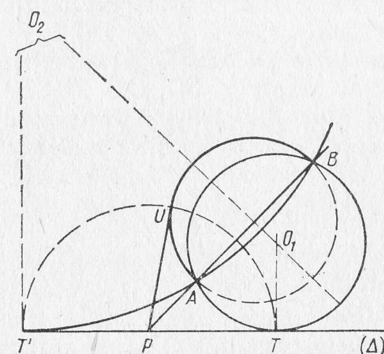


Fig. 3.11

prin A și B intersectează dreapta (Δ), deci nu mai poate fi tangent ei.

2) În general problema admite două soluții și anume două cercuri neegale. Dacă însă $AB \perp (\Delta)$, atunci cele două cercuri devin simetrice față de AB și deci egale.

Dacă $AB \parallel (\Delta)$, punctul P este aruncat la infinit. În acest caz mediatoarea lui AB taie pe (Δ) în T, iar problema are o singură soluție: cercul ABT.

Orice problemă de construcție grafică necesită trei etape:

1) găsirea elementelor care pot folosi la construcția cerută, fie presupunînd problema rezolvată și desenînd o figură aproximativă, fie prin metode directe;

2) efectuarea construcției cu rigla și compasul, cu ajutorul elementelor găsite;

3) discuția problemei în raport cu elementele date. Această ultimă etapă pretinde la rîndul ei: a) condițiile de posibilitate a problemei; b) numărul de soluții posibile în diferite cazuri; c) eventuale generalizări sau particularizări interesante.

O problemă de construcție grafică, căreia îi lipsește discuția, nu este rezolvată decît într-un caz particular: acela al figurii considerate.

În soluția problemei 13 am subliniat clar etapele de rezolvare. De menționat că acestei probleme i se poate da o soluție cel puțin tot așa de simplă, cu ajutorul asemănării. Nu insistăm.

Problema 14. *Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu centrul în O, cu laturile $AB = a$, $BC = b$ (unde $a > b$) și se construiesc în exterior semicercurile S_1, S_2, S_3 cu diametrele respectiv BC, CD, DA. O dreaptă arbitrară dusă prin B întîlnește semicercul S_1 în M, iar paralela dusă prin D la BM întîlnește semicercul S_3 în N și semicercul S_2 în P. Se notează $\sphericalangle MBC = \alpha$.*

Se cere:

a) *să se demonstreze că dreapta MP trece prin vîrful C al dreptunghiului;*

b) *să se demonstreze că $OM = OP$ și să se calculeze lungimea segmentului OM în funcție de laturile dreptunghiului și de unghiul α;*

c) *să se găsească locul geometric al intersecției perpendicularelor duse din N și P respectiv pe laturile AD și CD ale dreptunghiului.*

(Institutul Politehnic București, concurs de admitere, iulie, 1972)

R e z o l v a r e. a) Deoarece $\sphericalangle NDA = \alpha \Rightarrow \sphericalangle PDC = 90° - \alpha$ și din triunghiul dreptunghic PDC (înscris în semicerc) $\sphericalangle PCD = \alpha$. Apoi $\sphericalangle MCB = 90° - \alpha$, deci $\sphericalangle PCM = \alpha + 90° + (90° - \alpha) = 180°$, deci punctele P, C, M sînt coliniare (fig. 3.12).

b) $DN = BM$ (din egalitatea evidentă a triunghiurilor dreptunghice DNA și MBC), deci figura $BMDN$ este paralelogram și diagonalele MN, BD se taie în părți egale. Rezultă că MN trece prin O și că $OM = ON$. Atunci în triunghiul dreptunghic MPN, OP este mediană: $OP = OM$. Lungimea lui OM se calculează din triunghiul OO_1M și anume:

$$OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2 - 2OO_1 \cdot O_1M \cos (90° + 2\alpha)$$

sau

$$OM^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \sin 2\alpha}{4}.$$

Se deduce

$$MN^2 = a^2 + b^2 + 2ab \sin 2\alpha.$$

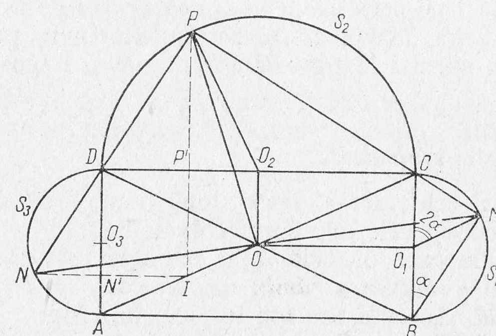


Fig. 3.12

c) Fie P' proiecția lui P pe CD și N' proiecția lui N pe DA. Punctul al cărui loc se cere este $I \equiv PP' \cap NN'$. Putem determina trei puncte ale locului geometric și anume:

cînd $N \equiv A$, atunci $I \equiv A$;
cînd N este mijlocul arcului DA ($\alpha = 45°$), atunci și P este mijlocul semicercului CD, iar $I \equiv O$;
cînd $N \equiv D$, atunci $I \equiv C$.

Acestea sugerează că locul geometric ar putea fi segmentul AC și în acest caz ar trebui ca PP' și NN' să se întîlnească pe AC. Fie $I \equiv AC \cap PP'$ și $I' \equiv AC \cap NN'$. Avem

$$\frac{IA}{IC} = \frac{P'D}{P'C} \quad \text{și} \quad \frac{I'A}{I'C} = \frac{N'A}{N'D}.$$

Dar $\triangle CPD \sim \triangle ADN \Rightarrow \frac{P'D}{P'C} = \frac{N'A}{N'D}$, prin urmare $\frac{IA}{IC} = \frac{I'A}{I'C} \Rightarrow I' \equiv I$. Deoarece $I \in AC$, locul geometric al intersecției perpendicularelor din P și N, respectiv pe CD și DA este diagonala AC.

Observație. S-ar putea scrie

$$\frac{P'D}{P'C} = \left(\frac{PD}{PC}\right)^2 = \text{tg}^2\,\alpha \text{ și } \frac{N'A}{N'D} = \left(\frac{NA}{ND}\right)^2 = \text{tg}^2\,\alpha \Rightarrow \frac{P'D}{P'C} = \frac{N'A}{N'D}.$$

Desigur, folosirea directă a asemănării triunghiurilor este mai comodă.

3.9. **Arii.** Desigur nu vom reface aici formulele care dau ariile diferitelor figuri plane, dar vrem să stăruim asupra unor proprietăți pe care elevii le aplică destul de rar și care uneori pot ușura foarte mult rezolvarea unor probleme. Ne referim în special la *figurile echivalente* și la *compararea ariilor*.

3.9.1. *Figuri echivalente*

Triunghiuri echivalente. Dacă două triunghiuri de forme diferite au aceeași arie, ele sînt echivalente.

Din formula care dă aria unui triunghi rezultă imediat că dacă *baza și înălțimea rămîn neschimbate, aria rămîne și ea neschimbată*. Aceasta are loc în cazurile cînd:

a) o latură rămîne fixă, iar vîrful opus acesteia se deplasează pe o paralelă la acea latură;

b) un vîrf rămîne fix, iar latura opusă se deplasează pe dreapta din care face parte, păstrîndu-și mărimea constantă;

c) deplasările de la a) și b) se aplică succesiv sau simultan unui triunghi.

Problema figurilor echivalente se pune evident și pentru poligoane, cercuri etc.

Problema 15. *Se dă un triunghi ABC și o dreaptă (Δ) care nu este paralelă cu nici una din laturile triunghiului. Să se construiască un triunghi echivalent cu $\triangle ABC$, care să aibă una din laturi situată pe (Δ).*

Rezolvare. Aici nu este nevoie de a presupune problema rezolvată, ci să ne gîndim la posibilitățile de a obține triunghiuri echivalente. Păstrăm latura BC fixă (fig. 3.13) și ducem $AA' \parallel BC$, $A' \in (\Delta)$. Am obținut triunghiul $A'BC$ echivalent cu ABC. Acum păstrăm pe A' și deplasăm pe BC pînă cînd C ajunge în $N \in (\Delta)$, iar B în M. Am obținut astfel triunghiul $A'MN$ echivalent cu ABC, avînd *latura* $A'N$ situată pe (Δ). Dar să observăm că putem deplasa pe BC pe dreapta suport, pînă cînd B *vine în* N și C în P (simetricul lui M față de N) astfel că de data aceasta obținem triunghiul $A'NP$ diferit de $A'MN$. Problema are deci, referitor la vîrful A, *două soluții distincte*.

Construcție. Se duce prin A paralela la BC pînă întîlnește pe (Δ) în A'. Se prelungește apoi BC pînă taie pe (Δ) în N și se ia de o parte și alta segmentele $MN = NP = BC$. Soluțiile problemei sînt $A'MN$ și $A'NP$.

Discuție. Deoarece (Δ), prin enunț, nu este paralelă cu vreuna din laturile triunghiului, se mai obțin cîte două soluții

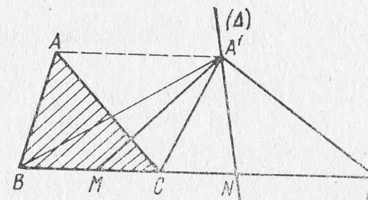


Fig. 3.13

pentru vîrfurile B și C. Problema are în total *șase soluții distincte.*

Dacă nu s-ar fi impus nici o condiție dreptei (Δ), aceasta ar putea fi paralelă numai cu una dintre laturi, deci oricum există patru soluții. Așadar, problema considerată în general are minimum *patru soluții.*

Problema 16. *Să se construiască un triunghi echivalent cu un patrulater dat, astfel ca o latură a triunghiului să fie pe o dreaptă dată care trece printr-un vîrf al patrulaterului.*

Rezolvare. Presupunem că dreapta dată (Δ) trece prin vîrful C (fig. 3.14). Patrulaterul poate fi descompus în două triunghiuri prin oricare dintre diagonalele sale. Alegem pe AC, deoarece $C \in (\Delta)$. Rămîne acum, păstrînd latura comună AC fixă, să construim două triunghiuri echivalente respectiv cu $\triangle ABC$ și $\triangle ACD$, lucru care se obține prin deplasarea vîrfurilor B și D pe paralele la AC, pînă ajung respectiv în E și F pe (Δ).

Soluția este triunghiul AEF, deoarece $\triangle AEC$ este echivalent cu $\triangle ABC$, iar $\triangle AFC$ cu $\triangle ADC$.

Construcția grafică rezultă din cele de mai înainte.

Discuție. Deoarece (Δ) nu poate fi confundată cu AC (trece printr-un *singur* vîrf al patrulaterului), paralelele din B, D la AC determină în mod unic punctele E, F. Problema are o singură soluție.

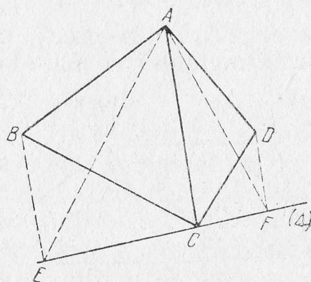


Fig. 3.14

Problema 17. *Se dă un trapez $ABCD$ cu baza mare AB și baza mică CD. Să se împartă trapezul în două trapeze echivalente printr-o dreaptă care trece prin punctul dat $M \in CD$.*

Rezolvare. Facem întîi observația că aria trapezului se poate scrie $\mathcal{A} = \frac{B+b}{2} h = EF \cdot h$, unde EF este segmentul care unește mijloacele laturilor AD, BC. Presupunem problema rezolvată și fie $N \in AB$, iar $I \equiv MN \cap EF$ (fig. 3.15). Trapezele $ADMN$ și $MNBC$ au evident aceeași înălțime h ca a trapezului dat, prin urmare, trebuie să avem $EI \cdot h = IF \cdot h \Rightarrow EI = IF$, deci I este mijlocul segmentului care unește mijloacele laturilor neparalele.

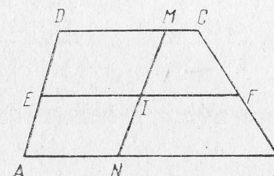


Fig. 3.15

Construcție grafică. Se unește M cu mijlocul I al segmentului EF și se obține punctul N. Dreapta MN desparte trapezul dat în alte două trapeze echivalente.

Discuție. Problema este totdeauna posibilă și are soluție unică. Dacă însă M ar fi pe baza mare AB, s-ar putea ca MI să cadă în afara bazei mici CD.

Fie $P \equiv CI \cap AB$ și $Q \equiv DI \cap AB$. Condiția de posibilitate a problemei în acest caz este ca $M \in PQ - \{P, Q\}$.

3.9.2. *Compararea ariilor*

a) Orice mediană a unui triunghi, de exemplu, AM, îl împarte în două triunghiuri echivalente, deoarece bazele sînt egale ($BM = MC$) și înălțimea din A este comună.

Dacă M este mai aproape de B, atunci aria $\triangle ABM <$ aria $\triangle AMC$ etc.

b) **Teoremă.** *Raportul ariilor a două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ care au cîte un unghi egal sau unul suplimentar celuilalt ($\widehat{A'} = \widehat{A}$ sau $\widehat{A'} = 180° - \widehat{A}$), este egal cu raportul produselor laturilor care formează unghiurile respective:*

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'}.$$

D e m o n s t r a ț i a este simplă. Ducînd înălțimile $BE, B'E'$ în cele două triunghiuri, se formează $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$, deoarece au $\widehat{A} = \widehat{A'}$. Rezultă

$$\frac{BE}{B'E'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Apoi

$$\frac{S}{S'} = \frac{AC \cdot BE}{A'C' \cdot B'E'} = \frac{AC \cdot AB}{A'C' \cdot A'B'}.$$

Cititorul va face singur figura și demonstrația în cazul $\widehat{A'} = 180° - \widehat{A}$.

Demonstrația trigonometrică este și mai simplă, căci în ambele cazuri

$$S = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin \widehat{A} \text{ și } S' = \frac{A'B' \cdot A'C'}{2} \sin \widehat{A'},$$

dar

$$\sin \widehat{A'} = \sin \widehat{A}.$$

c) **Teoremă.** *Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.*

Într-adevăr triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au toate unghiurile egale și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$ (raportul de asemănare). Conform teoremei precedente

$$\frac{S}{S'} = \frac{AB}{A'B'} \cdot \frac{AC}{A'C'} = k^2.$$

Iată și cîteva aplicații ale acestor teoreme.

Problema 18. *Fie ABC un triunghi oarecare, AD înălțimea din A și H ortocentrul. Să se demonstreze că*

$$HD \cdot AB \cdot AC = AD \cdot BH \cdot CH.$$

R e z o l v a r e. Desigur că se pot da soluții folosind asemănări de triunghiuri, dar o rezolvare foarte simplă este cea următoare.

Triunghiul BHC are $\sphericalangle BHC = 180° - \widehat{A}$, deci notînd cu S_a aria triunghiului, putem scrie

$$\frac{S}{S_a} = \frac{AB \cdot AC}{BH \cdot CH}.$$

Triunghiurile ABC și BHC avînd baza comună BC, raportul ariilor este egal cu raportul înălțimilor, adică $\frac{S}{S_a} = \frac{AD}{HD}$. Rezultă

$$\frac{AB \cdot AC}{BH \cdot CH} = \frac{AD}{HD},$$

din care se deduce relația cerută.

Problema 19. *Se dă triunghiul dreptunghic ABC și un punct M în planul său, care se proiectează pe catetele AC, AB respectiv în N și P. Să se demonstreze că dacă M se mișcă pe o paralelă la ipotenuza BC, între dreptele AB și AC, expresia*

$$E = AP \cdot AC + AN \cdot AB$$

păstrează o valoare constantă.

R e z o l v a r e. Deoarece $\widehat{A} = 90°$, rezultă $AP = MN$ și $AN = MP$. Presupunem pe M exterior triunghiului ABC (fig. 3.16). Avem evident:

$$AP \cdot AC = MN \cdot AC = 2 \text{ aria } (MAC),$$

$$AN \cdot AB = MP \cdot AB = 2 \text{ aria } (MAB),$$

$$E = 2 \text{ aria } (MBAC) = 2 [\text{aria } (ABC) + \text{aria } (MBC)].$$

Însă aria MBC rămîne constantă cînd M se mișcă pe o paralelă la BC, deci $E = \text{const.}$

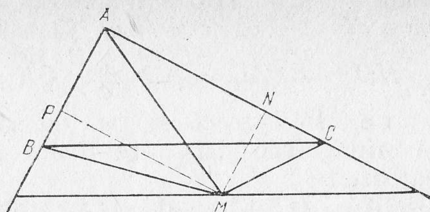


Fig. 3.16

Problema 20. *Se iau pe laturile BC, CA, AB ale unui triunghi ABC trei puncte A', B', C' astfel ca*

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = m.$$

Să se găsească aria triunghiului A'B'C' în funcție de aria triunghiului dat și de m.

(Țițeica, Gh. *Culegere de probleme de geometrie.* București, Editura tehnică, 1962, problema 771)

R e z o l v a r e. Din enunț se deduce $AC' = m \cdot AB$; $BA' = m \cdot BC$; $CB' = m \cdot CA$ și deci $C'B = (1 - m)AB$; $A'C = (1 - m)BC$; $B'A = (1 - m)\,CA$. Dacă notăm cu S aria triunghiului ABC și cu S_a, S_b, S_c ariile triunghiurilor $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ și observăm că fiecare din aceste triunghiuri mici au cîte un unghi comun cu $\triangle ABC$, atunci putem scrie

$$\frac{S_a}{S} = \frac{AB' \cdot AC'}{AC \cdot AB} = m(1 - m) \text{ și analog } \frac{S_b}{S} = \frac{S_c}{S} = m(1 - m).$$

Rezultă imediat

$$S_{A'B'C'} = S - S_a - S_b - S_c = S - 3m(1 - m)\,S,$$

adică

$$S_{A'B'C'} = S(1 - 3m + 3m^2).$$

Problema 21. *Se dau în același plan semidreptele* O_x, O_y, O_z, *în această ordine, astfel că* $\sphericalangle xOy = 60°$ *și* $\sphericalangle yOz = 30°$. *Pe Ox se ia punctul fix A și se notează* $OA = a$. *Din A se duce perpendiculara pe Oy și se notează cu D piciorul perpendicularei și cu* $B \equiv AD \cap Oz$, *apoi oblica OE* $(E \in Oy)$ *și se notează* $C \equiv AE \cap Oz$. *Dacă* $\sphericalangle DAE = \alpha$ $(OE > OD)$:

a) *Să se exprime raportul* $\frac{CE}{EA}$ *în funcție de unghiul* α;

b) *Fie F mijlocul segmentului AB. Să se arate că OF este bisectoarea unghiului AOD.*

c) *Să se determine unghiul* α *astfel ca aria(BCE) să fie egală cu aria(AOFE).*

(Gazeta Matematică, nr. 12, 1975)

R e z o l v a r e. a) În triunghiurile OEC și OAE avem (fig. 3.17)

$$\frac{CE}{\sin 30°} = \frac{CO}{\sin E}; \quad \frac{EA}{\sin 60°} = \frac{OA}{\sin E}.$$

Împărțind relațiile, se obține

$$\frac{CE}{EA}\sqrt{3} = \frac{CO}{OA} = \operatorname{tg}(\alpha + 30°) \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}(\alpha + 30°).$$

b) În triunghiul dreptunghic OAB, OF este mediană, deci $OF = FA$ și triunghiul OFA este isoscel, deci $\sphericalangle FOA = 30°$, adică OF este bisectoarea unghiului AOD (60° prin enunț).

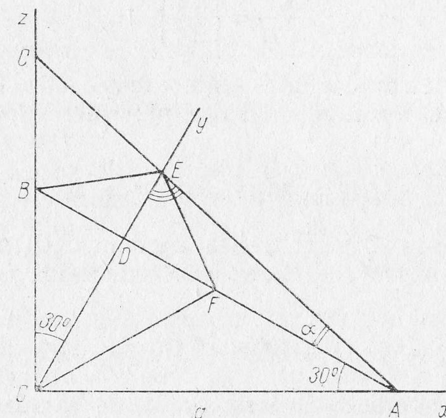


Fig. 3.17

c) Deoarece $\sphericalangle FOE = 30°$, triunghiurile OFE și OBE sînt simetrice față de OE, deci egale. Dacă aria $(BCE) =$ $=$ aria $(AOFE)$, atunci adăugînd în ambele părți ariile triunghiurilor egale, trebuie ca

$$\text{aria } (OCE) = \text{aria } (OAE).$$

Luînd ca baze CE și EA, înălțimea este comună, deci trebuie ca $CE = EA \Rightarrow OE$ mediană. Atunci

$$\frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + 30°) = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°,$$

prin urmare $\alpha = 30°$.

PROBLEME PROPUSE SPRE REZOLVARE

1. În triunghiul dreptunghic ABC cu $\widehat{A} = 90°$, D este piciorul înălțimii, E și F sînt proiecțiile lui D respectiv pe catetele AB și AC, iar E' și F' sînt proiecțiile lui E și F pe ipotenuză. Să se demonstreze că

$$\frac{BE'}{F'C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4.$$

2. a) Se dau în plan două segmente neegale: $A_1A_2 \neq B_1B_2$. Să se găsească locul geometric al punctului M care satisface relația

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2.$$

b) Dîndu-se și un al treilea segment C_1C_2 neegal cu primele două, să se cerceteze dacă există în plan un punct M astfel ca

$$MA_1^2 + MA_2^2 = MB_1^2 + MB_2^2 = MC_1^2 + MC_2^2.$$

c) Să se studieze aceleași probleme în spațiu. (Generalizarea problemei 8).

3. Se dă hexagonul regulat $ABCDEF$. Să se afle locul geometric al punctului M, știind că

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + ME^2 + MF^2 = k^2 = \text{const.}$$

4. Se dă un triunghi oarecare ABC al cărui centru de greutate este G. Dacă M este un punct oarecare din planul său, să se demonstreze că

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

5. a) Să se afle unghiurile triunghiului ortic $A'B'C'$ al unui triunghi dat.

b) Să se găsească expresia ariei triunghiului ortic în funcție de laturile sale a', b', c', de aria S a triunghiului ABC și de rază R a cercului circumscris lui ABC.

c) Din expresia obținută să se deducă raza ρ a cercului circumscris triunghiului ortic și să se arate că $\rho = R/2$.

6. Se dă un segment AB și un punct fix $C \in AB$. Se duce un cerc (O) arbitrar prin punctele A, B și un cerc concentric cu acesta, ce trece prin C. Să se demonstreze că orice coardă MN a cercului (O), tangentă cercului concentric, păstrează mărimea constantă, atunci cînd centrul O comun celor două cercuri variază (descrie mediatoarea segmentului AB).

7. a) Se dau două cercuri fixe cu centrele O_1 și O_2, de raze respectiv r_1 și r_2. Să se afle locul geometric al centrului O al unui al treilea cerc, de rază dată r, astfel ca tangentele comune exterioare la perechile de cercuri (O), (O_1) și (O), (O_2) să fie egale.

b) Ce condiție trebuie să îndeplinească raza r a cercului pentru ca locul geometric de mai sus să fie chiar mediatoarea segmentului O_1O_2? Se presupune $r_1 \neq r_2$.

(Gazeta matematică și fizică, seria B, 1954, problema 1350)

8. Să se demonstreze că într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ o diagonală (de exemplu BD) împarte pe cealaltă (AC) într-un raport egal cu raportul *produselor laturilor* triunghiurilor în care prima diagonală (BD) desparte patrulaterul. Produsul laturilor se socotește fără diagonala comună.

9. Se dă un patrulater oarecare $ABCD$ şi un punct M situat pe latura cea mai mică. Să se ducă prin M o dreaptă care să despartă patrulaterul dat în alte două patrulatere echivalente.

10. Se dă un patrulater ortodiagonal şi se notează cu O intersecţia diagonalelor şi cu M, N, P, Q proiecţiile lui O pe laturile AB, BC, CD, DA. Fie apoi $E \equiv OA \cap MQ$, $F \equiv OB \cap \cap MN$, $G \equiv OC \cap NP$, $H \equiv OD \cap PQ$. Să se demonstreze că:

a) patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil;

b) avem relaţia

$$\frac{1}{AM \cdot MB} + \frac{1}{CP \cdot PD} = \frac{1}{BN \cdot NC} + \frac{1}{DQ \cdot QA};$$

c) $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1;$

d) $\frac{OE}{EA} \cdot \frac{OF}{FB} \cdot \frac{OG}{GC} \cdot \frac{OH}{HD} = 1.$

4

PUNCTUL. DREAPTA. PLANUL

4.1. Elementele fundamentale ale geometriei în spaţiu sînt punctul, dreapta şi planul. Pornind de la acestea, se clădeşte geometria în spaţiu; de aceea primele axiome se referă tocmai la aceste elemente. Să le reamintim:

1) *Trei puncte neaşezate pe aceeaşi dreaptă determină un singur plan.*
2) *Dacă două puncte A şi B sînt situate într-un plan, atunci toate punctele dreptei AB sînt situate în acest plan. Altfel spus, dacă două puncte ale unei drepte sînt situate într-un plan, toată dreapta este conţinută în acel plan.*
3) *Dacă două plane au un punct comun, ele mai au cel puţin încă un punct comun.*
4) *Într-un plan se pot găsi totdeauna trei puncte neaşezate în linie dreaptă, iar în spaţiu cel puţin patru puncte nesituate în acelaşi plan.*

În baza acestor axiome se demonstrează primele teoreme şi se dezvoltă apoi, cu ajutorul lor, geometria privitoare la punct, dreaptă, plan.

4.2. În cele ce urmează vom urmări pe teoreme şi probleme, anume alese, cîteva moduri de raţionament din geometria în spaţiu. Unele dintre acestea se folosesc şi în geometria plană, ca de exemplu raţionamentul prin reducere la absurd, metoda reducerii unei probleme noi la alta cunos-

cută etc., altele sînt raţionamente specifice geometriei în spaţiu.

Teorema 1. *Dacă o dreaptă (D) este paralelă cu un plan P, paralela dusă printr-un punct $A \in P$ la dreapta (D) este conţinută în planul P.*

Presupunem că paralela (D') dusă prin A nu aparţine planului P. Dreapta (D) şi punctul A definesc un plan care, în baza unei teoreme cunoscute, intersectează planul P după o dreaptă $(D_1) \parallel (D)$. Ar însemna că prin A se pot duce două paralele la (D), ceea ce contrazice postulatul lui Euclid. Deci $(D_1) \equiv (D')$. (Raţionament prin reducere la absurd.)

Teorema 2. *Dacă două plane sînt paralele cu aceeaşi dreaptă (D), atunci dreapta lor de intersecţie este paralelă cu (D).*

Demonstraţia se bazează pe teorema precedentă. Fie planele $P \parallel (D)$ şi $Q \parallel (D)$, care prin ipoteză nu sînt paralele, deci au cel puţin un punct comun A. Se duce prin A paralela (Δ) la (D). Avem $(\Delta) \subset P$ deoarece $(D) \parallel P$ şi la fel $(\Delta) \subset Q$, de unde $(\Delta) \equiv P \cap Q$, deci dreapta de intersecţie a planelor P şi Q este paralelă cu (D). (După cum se vede, este un alt fel de raţionament.)

4.3. Reamintim în continuare cîteva teoreme de geometrie în spaţiu, fără demonstraţii, care dealtfel se găsesc în manual.

Teorema 3. *Segmentele de drepte paralele, cuprinse între două plane paralele, sînt egale.*

Teorema 4. *Mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare segmente respectiv proporţionale.*

Teorema 5. *Dacă un plan este paralel cu dreapta (Δ) de intersecţie a altor două plane, atunci el determină pe acele plane drepte de intersecţie paralele între ele şi paralele cu (Δ).*

Teorema 6. *Printr-un punct exterior unui plan se poate duce un plan paralel cu acesta şi numai unul.*

Teorema 7. *Un plan este perpendicular pe alt plan, dacă conţine o perpendiculară pe acel plan.*

Teorema 8. *Două plane perpendiculare pe aceeaşi dreaptă sînt paralele între ele.*

Desigur sînt multe teoreme privitoare la drepte şi plane paralele, drepte şi plane perpendiculare, proiecţii etc.; am amintit aici pe acelea care se folosesc mai des şi pe acelea pe care, din experienţă, ştim că elevii le stăpînesc cu aproximaţie.

4.4. Ca ilustrare a raţionamentului geometric în spaţiu, vom da o serie de probleme, cu rezolvările lor.

Problema 1. *Să se arate că există drepte care se sprijină pe trei drepte oarecare din spaţiu.*

R e z o l v a r e. Fie D_1, D_2, D_3 dreptele din spaţiu şi un punct $A \in D_1$. Punctul A şi dreapta D_2 definesc un plan (P), care este înţepat de dreapta D_3 în C (fig. 4.1). Dreptele D_2 şi AC sînt în acelaşi plan şi, dacă nu sînt paralele, se taie într-un punct B. Soluţia problemei este dreapta ABC care se sprijină pe cele trei drepte.

Discuţie. a) Deoarece punctul $A \in D_1$ a fost luat arbitrar, problema are o infinitate de soluţii. Dacă pentru un punct A se întîmplă ca $D_3 \parallel (P)$ sau dacă $AC \parallel D_2$, alegem alt punct A şi găsim o dreaptă care se sprijină pe D_1, D_2, D_3, deci oricum problema, *în general*, are o infinitate de soluţii.

b) Dacă două din drepte sînt paralele, de exemplu $D_2 \parallel D_3$, dreapta D_1 înţeapă planul (D_2, D_3) într-un punct A. Orice

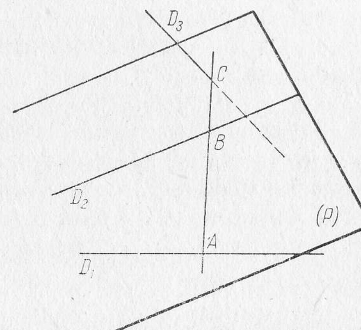


Fig. 4.1

dreaptă (Δ) care trece prin A și este situată în planul (D_2, D_3) întîlnește pe D_2 și D_3 (cu excepția $\Delta \parallel D_2$), deci problema are tot o infinitate de soluții, dar pentru un singur punct A determinat. (Cititorul este rugat să facă singur figura.)

c) Dacă $D_1 \parallel D_2 \parallel D_3$, problema nu are soluție decît dacă acestea sînt în același plan și atunci există o infinitate de drepte (Δ).

d) Dacă D_1, D_2, D_3 sînt concurente, orice dreaptă care trece prin punctul lor comun este o soluție, dar în acest caz, ca și în cazul precedent, problema nu prezintă interes.

Observație. Raționamentul folosit în această problemă este specific geometriei în spațiu.

Problema 2. *Să se găsească un plan pe care trei drepte oarecare din spațiu să se proiecteze ca drepte concurente.*

Rezolvare. Ne limităm la cazul cînd dreptele sînt oarecare, adică luate două cîte două nu sînt situate în același plan, așa cum dealtfel cere enunțul. Pentru ca să se proiecteze ca drepte concurente înseamnă că există cîte un punct pe fiecare din dreptele date, astfel că proiecțiile lor pe plan coincid, cu alte cuvinte, dreapta proiectantă a lor se sprijină pe cele trei drepte, ceea ce este posibil conform problemei precedente.

De aici rezultă *construcția:* se duce o dreaptă (Δ) care se sprijină pe cele trei drepte din spațiu, apoi un plan $P \perp (\Delta)$. Planul P este cel cerut de problemă.

Discuție. Deoarece există o infinitate de drepte (Δ), problema are o infinitate de soluții.

Problema 3. *Se consideră unghiul diedru format de două plane concurente P, Q, avînd muchia comună (Δ) și un punct oarecare A al spațiului, nesituat pe P sau Q. Să se ducă prin A un plan R care să intersecteze planele date după drepte paralele, echidistante față de (Δ).*

Rezolvare. Pentru ca planul R să intersecteze planele concurente P și Q după drepte paralele trebuie ca $R \parallel (\Delta)$

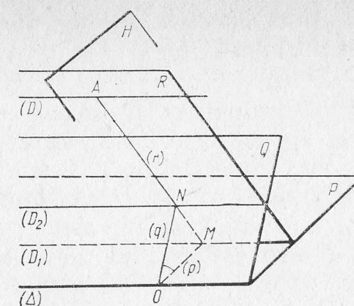


Fig. 4.2

muchia lor comună. Într-adevăr, dacă R nu este paralel cu (Δ), atunci o întîlnește într-un punct B prin care în mod obligatoriu trebuie să treacă $(D_1) \equiv R \cap P$ și $(D_2) \equiv R \cap Q$, deci (D_1) și (D_2) nu sînt paralele (reducere la absurd). Dacă prin A ducem $(D) \parallel (\Delta)$, atunci (fig. 4.2) orice plan care trece prin (D) intersectează pe P și Q după drepte paralele $(D_1) \parallel (D_2) \parallel (\Delta)$. Trebuie determinat acel plan pentru care (D_1) și (D_2) sînt echidistante față de (Δ). Pentru aceasta ducem prin A un plan $H \perp (\Delta)$ care determină în planele P și Q dreptele $(p) \perp (\Delta)$ și $(q) \perp (\Delta)$. Unghiul $[(p), (q)]$ este unghiul plan corespunzător diedrului (P, Q). Fie $O \equiv (p) \cap (q) \in (\Delta)$. Problema se reduce la următoarea problemă de geometrie plană: *să se ducă prin A în planul H o dreaptă (r), care să intersecteze pe (p), (q) respectiv în M, N, astfel ca $OM = ON$.*

Se observă că în triunghiul isoscel OMN înălțimea este și bisectoare, deci (r) este perpendiculară pe bisectoarea unghiului MON. Planul căutat este determinat de (r) și (D). Rezultă că planul căutat R este acela dus prin dreapta (D) perpendicular pe planul bisector al diedrului (P, Q).

S-a folosit aici metoda reducerii unei probleme de geometrie în spațiu la o problemă de geometrie plană.

Problema 4. *Se dau în spațiu două drepte (Δ), (D) nesituate în același plan și două puncte A, B nesituate pe (Δ) sau (D). Se presupune că dreapta AB nu este paralelă cu (Δ) sau cu (D). Să se ducă prin punctele A și B două plane P, Q paralele între ele și paralele*

cu dreapta (D) astfel ca ele să determine pe (Δ) un segment de lungime dată l.

R e z o l v a r e. Presupunem problema rezolvată, fără condiția ca P, Q să fie paralele cu dreapta (D), deci două plane $P \parallel Q$ care trec respectiv prin A și B și determină pe (Δ) segmentul $MN = l$ (fig. 4.3). Dacă din B ducem $BC = l$ și paralel cu (Δ), atunci $MBCN$ este paralelogram și $MB \parallel NC$. Planul P este determinat de dreptele AC (fixă) și CN, iar Q se duce paralel cu P. Prin urmare, este de ajuns ca prin dreapta AC să se ducă un plan arbitrar, iar prin B un plan $Q \parallel P$ și cele două plane determină pe (Δ) un segment $MN = l$.

Dar prin B putem duce și segmentul $BC' = l$ și $\parallel(\Delta)$ în sens contrar lui BC. Planele P' ce trec prin AC' și $Q' \parallel P'$ vor determina alte segmente $M'N' = l$. Problema astfel pusă admite deci o dublă infinitate de soluții.

Dacă introducem acum condiția ca $P \parallel Q \parallel (D)$, atunci, ducînd $AX \parallel (D)$, planul P este unic determinat, anume $P \equiv (AC, AX)$, iar P și $Q \parallel P$ determină pe (Δ) segmentul $MN = l$. În mod asemănător planul $P' \equiv (AC', AX)$ împreună cu $Q' \parallel P'$ determină segmentul $M'N' = l$.

Construcția planelor P, Q rezultă din considerațiile precedente și se obțin cele două soluții distincte.

Discuție. a) În condițiile impuse de enunț în general, problema are două soluții distincte.

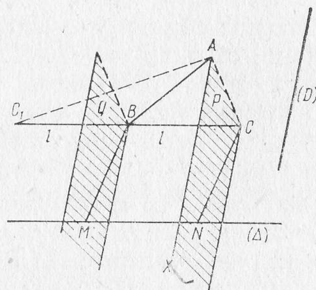


Fig. 4.3

b) Se poate însă ca $(D) \parallel AC$, ceea ce nu contrazice condițiile din enunț. În acest caz P poate fi orice plan ce trece prin AC și problema are o infinitate de soluții. În schimb $P' \equiv (AC', AC)$ conține dreapta $CC' \parallel (\Delta)$, deci $P' \parallel (\Delta)$ și nu dă nici o soluție. Reciproc, dacă $(D) \parallel AC'$, atunci P' se rotește în jurul lui AC' și dă o infinitate de soluții, iar P nu dă nici o soluție.

Problema 5. *Să se determine un plan pe care două drepte oarecare din spațiu să se proiecteze ca drepte paralele.*

R e z o l v a r e. Fie D_1 și D_2 dreptele date. Pentru ca proiecțiile lor pe un plan (π) să fie paralele trebuie ca planele proiectante P și Q să fie paralele. Într-adevăr, acestea trebuie să conțină proiecțiile paralele ale dreptelor date și cîte o perpendiculară pe planul (π), care sînt de asemenea paralele. Dar, dacă $P \parallel Q$, ele trebuie să conțină și direcția D_1 și direcția D_2. Luăm atunci un punct $A \in D_1$ prin care ducem $D'_2 \parallel D_2$ (fig. 4.4). Dreptele concurente D_1, D'_2 determină planul P, iar prin D_2 se duce $Q \parallel P$. Orice plan $(\pi) \perp P$, deci $(\pi) \perp Q$, este o soluție a problemei, deoarece $d_1 \equiv (\pi) \cap P$ și $d_2 \equiv (\pi) \cap Q$ sînt paralele. Dar plane perpendiculare pe P se pot duce o infinitate, deci problema are o infinitate de soluții.

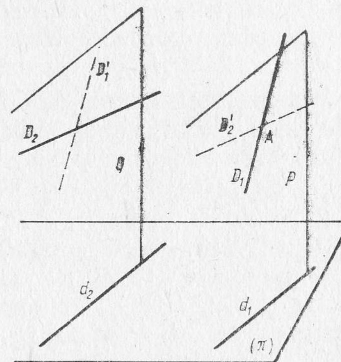


Fig. 4.4

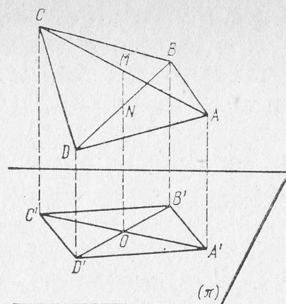


Fig. 4.5

Problema 6. *Să se determine un plan pe care un patrulater strîmb din spațiu se proiectează ca paralelogram.*

R e z o l v a r e. Considerăm un patrulater strîmb $ABCD$ în spațiu și notăm cu M, N mijloacele diagonalelor AC, BD. Pentru ca patrulaterul proiectat pe un plan (π) să fie paralelogram, trebuie ca diagonalele să se taie în părți egale sau, altfel spus, mijloacele lor să coincidă. Se știe însă că mijlocul unui segment se proiectează tot ca mijloc al segmentului proiectat (mai general, raportul în care un punct împarte un segment se păstrează în proiecție). Rezultă că este necesar și suficient ca mijloacele M, N al diagonalelor lui $ABCD$ să se proiecteze într-un singur punct O pe planul (π) de proiecție, cu alte cuvinte, $(\pi) \perp MN$ (fig. 4.5). Desigur există o infinitate de plane perpendiculare pe MN, toate paralele între ele, dar aceasta ne interesează mai puțin.

În concluzie: un patrulater strîmb $ABCD$ se proiectează ca paralelogram pe orice plan (π) perpendicular pe dreapta MN care unește mijloacele diagonalelor.

Problema 7. *Se dă un tetraedru $ABCD$ și se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale fețelor respectiv opuse vîrfurilor A, B, C, D. Se prelungesc segmentele G_1G_2, G_1G_3, G_1G_4, în sensul indicat aici pentru fiecare, cu $G_2L = 2G_1G_2$, $G_3M = 2G_1G_3$, $G_4N = 2G_1G_4$. Să se demonstreze că planul determinat de punctele L, M, N trece prin vîrful A.*

R e z o l v a r e. Fie I mijlocul segmentului CD. În triunghiurile ACD, BCD, AG_2, BG_1 sînt mediane, deci $I \equiv BG_1 \cap AG_2$. Apoi în triunghiul AIB avem $\frac{IG_1}{IB} = \frac{IG_2}{IA} = \frac{1}{3}$, deci conform reciprocei lui Thales $G_1G_2 \parallel AB$, iar din $\triangle IG_1G_2 \sim \triangle IAB$ se deduce $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \frac{AB}{3} \Rightarrow G_1L = AB$. Așadar, ABG_1L este paralelogram și $AL \parallel BG_1$. La fel se arată că $AM \parallel CG_1$ și $AN \parallel DG_1$. Deoarece trei drepte care trec prin A sînt paralele cu planul BCD, rezultă că L, M, N se găsesc în planul dus prin A, paralel cu (BCD).

Nu este greu de dovedit că triunghiul LMN este egal cu $\triangle BCD$. Această demonstrație o lăsăm pe seama cititorului ca un exercițiu.

Problema 8. *Se consideră un plan (P) și trei puncte A, B, C de aceeași parte a lui (P) avînd distanțele a, b, c pînă la acest plan. Să se demonstreze că distanța g de la centrul de greutate G al triunghiului ABC la planul P este dată de*

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

R e z o l v a r e. Notăm cu D mijlocul lui BC, iar proiecțiile tuturor punctelor pe planul (P) cu aceleași litere, dar cu accent. Mai notăm $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$, $DD' = d$ și $GG' = g$. Din trapezul $BB'C'C$ se deduce (fig. 4.6)

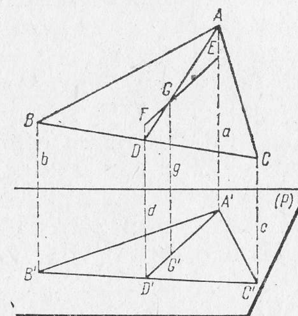


Fig. 4.6

$d = \frac{b+c}{2}$. Ducem prin G o paralelă la $A'D'$ care întîlneşte pe AA' şi DD' respectiv în E şi F. Triunghiurile GAE şi DGF, evident asemenea, ne dau $\frac{AE}{DF} = \frac{GA}{GD} = 2$, de unde $AE = 2DF$, deci $a - g = 2(g - d) = 2\left(g - \frac{b+c}{2}\right)$. Se deduce imediat

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

Observaţie. Formula rămîne adevărată şi în cazul în care unul dintre puncte se află de cealaltă parte a planului faţă de celelalte două, dar în acest caz distanţele punctelor situate de o parte a planului (de exemplu două dintre ele) vor fi socotite pozitive şi cea din partea opusă negativă (sau invers). Semnele depind de alegerea sensului pozitiv pe normala la plan.

Problema 9. *Se dă un plan (P), o dreaptă (D) cuprinsă în plan, un punct A exterior planului şi un unghi α. Să se determine poziţia unui triunghi echilateral ABC care are latura BC cuprinsă în planul (P) şi paralelă dreptei (D), iar latura AB face unghiul α cu planul (P).*

(S.G.M. 1938, vol. IV pag. 159)

Rezolvare. Ducem $AO \perp (P)$. Deoarece AB face unghiul α cu planul (P), rezultă $\sphericalangle(AB, AO) = 90° - \alpha$, deci AB este o oblică ce se poate construi uşor şi a cărei lungime este determinată, dar nu şi poziţia sa. Construim atunci o oblică AM astfel ca $\sphericalangle(AM, AO) = 90° - \alpha$ (fig. 4.7). Toate oblicele care fac acelaşi unghi sînt egale şi au picioarele pe cercul cu centrul O şi raza OM, deci B, $C \in (O)$. Trebuie construit triunghiul echilateral cu latura $AB = BC = AM$ cunoscută şi care are $BC \parallel (D)$.

Chestiunea s-a redus astfel la următoarea *problemă de geometrie plană:* să se ducă într-un cerc dat o coardă de lungime dată, paralelă cu o dreaptă dată. Pentru aceasta se duce o coardă $MN = AM$ (cunoscută), apoi se construieşte cercul concentric cu (O), tangent coardei MN şi, în sfîrşit, cele două tangente la cercul concentric $BC \parallel B'C' \parallel (D)$.

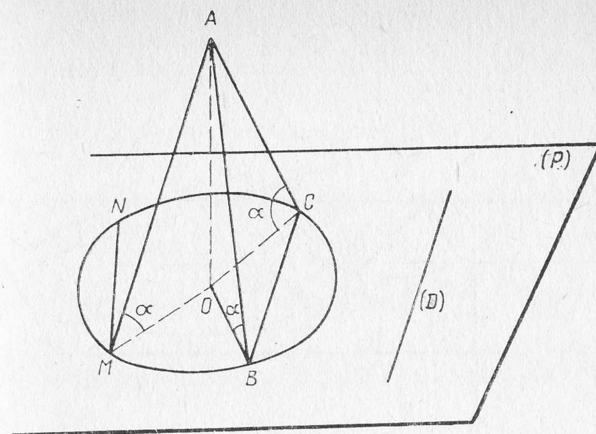


Fig. 4.7

Soluţiile problemei sînt triunghiurile ABC şi $AB'C'$ (în figură numai ABC).

Discuţie. Rămîne de văzut în ce condiţii problema este posibilă. Trebuie evident să avem $BC = AB \leqslant 2OB$ (diametrul) sau $\frac{OB}{AB} \geqslant \frac{1}{2}$. Dar $\frac{OB}{AB} = \cos\alpha$, deci $\cos\alpha \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \leqslant 60°$. În poziţia limită, BC este diametrul paralel cu (D) al cercului (O) şi $\alpha = \sphericalangle ABC = 60°$. Prin urmare, dacă $\alpha < 60°$, problema admite două soluţii, dacă $\alpha = 60°$, o singură soluţie, iar dacă $\alpha > 60°$, nici o soluţie.

Problema 10. *Se dă un plan P şi două puncte A şi B situate de aceeaşi parte a planului.*

a) *Să se găsească locul geometric al punctelor M din planul P astfel ca dreptele AM şi BM să facă acelaşi unghi cu planul.*

b) *Să se arate cum se poate construi punctul M care îndeplineşte condiţia de mai sus şi pentru care, în plus, unghiul AMB este drept.*

c) *Dacă se notează AB = d, iar distanţele de la A şi B la planul P cu a şi b, se cere condiţia ce trebuie satisfăcută de d, a, b pentru ca să fie posibilă construcţia punctului M de la* b).

(Olimpiada matematică, 1956)

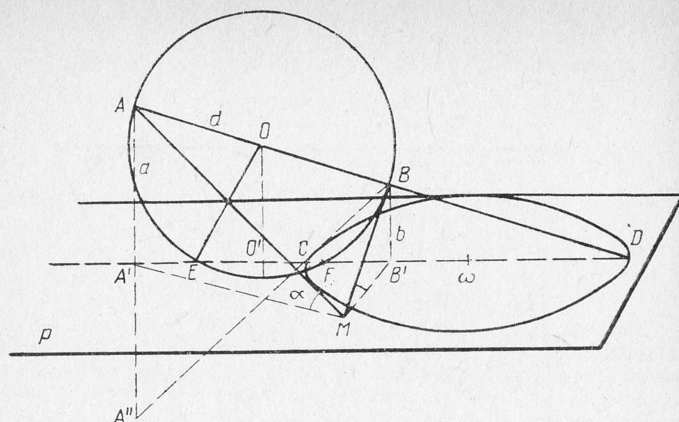


Fig. 4.8

R e z o l v a r e. a) Notăm A', B' proiecţiile punctelor A, B pe planul P. Deoarece $\sphericalangle AMA' = \sphericalangle BMB' = \alpha$, triunghiurile dreptunghice AMA' şi BMB' sînt asemenea (fig. 4.8), deci $\frac{MA'}{MB'} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b} = \text{const.}$ Locul geometric al lui M este cercul cu diametrul CD, unde C şi D sînt punctele care împart segmentul $A'B'$ în raportul $\frac{a}{b}$ (în valoare absolută). Aceste puncte se determină astfel: se ia simetricul A'' al lui A faţă de planul P şi rezultă $C \equiv A''B \cap A'B'$; $D \equiv AB \cap A'B'$ $\left(\text{cercul cu diametrul } CD \text{ se numeşte cercul lui Apollonius faţă de segmentul } A'B' \text{ şi raportul } \frac{a}{b}\right)$. Prin urmare, avem

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{a}{b} \Rightarrow A'C = \frac{a}{a+b} A'B'.$$

b) Dacă $\sphericalangle AMB = 90°$, punctul M aparţine sferei cu diametrul AB (şi centrul O); dar $M \in P$, deci M se află pe cercul de secţiune a sferei (O) cu planul P (în figură cercul cu diametrul EF). Dacă acest cerc există şi dacă intersectează cercul cu diametrul CD, el determină punctele cerute M_1, M_2 simetrice faţă de $A'B'$.

c) Presupunem $a > b$ şi amintim că două puncte conjugate faţă de capetele unui segment sînt de aceeaşi parte faţă de mijlocul segmentului. Dacă O' este proiecţia punctului O pe planul P, condiţiile ca să existe soluţii în cazul (b) sînt:

1) sfera (O) să intersecteze planul P;
2) $O'F > O'C$.

Din prima condiţie se deduce $OO' < \frac{AB}{2} \Rightarrow d > a + b$.

Trecem la a doua condiţie. Avem

$$O'F = \sqrt{OF^2 - OO'^2} = \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - (a+b)^2},$$

apoi, ţinînd seama de valoarea lui $A'C$ calculată la (a), rezultă

$$O'C = A'C - A'O' = \frac{a}{a+b} A'B' - \frac{1}{2} A'B' = \frac{a-b}{2(a+b)} A'B'.$$

Dar ducînd $BH \parallel B'A'$, triunghiul dreptunghic ABH ne dă

$$BH = A'B' = \sqrt{d^2 - (a-b)^2},$$

deci

$$O'C = \frac{a-b}{2(a+b)}\sqrt{d^2 - (a-b)^2}.$$

Înlocuind în a doua condiţie pe $O'F$ şi $O'C$, se obţine

$$\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - (a+b)^2} > \frac{a-b}{2(a+b)}\sqrt{d^2 - (a-b)^2}.$$

Deoarece ambele expresii sînt pozitive ($a > b$), putem ridica la pătrat şi efectuînd calculele se găseşte $d^2 > 2(a^2 + b^2)$. Aceasta include însă şi relaţia din prima condiţie, astfel că singura condiţie ca punctele M_1, M_2 de la b) să existe este ca $d^2 > 2(a^2 + b^2)$ sau $d > \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. În cazul cînd $d = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$, $M_1 \equiv M_2 \equiv C$ şi problema are o singură soluţie.

Problema 11. *Se dă un plan P şi un punct O exterior lui. Se duc apoi perpendiculara OA pe plan şi oblicele OB, OC astfel ca $\sphericalangle BAC = 90°$.*

1°. *Dacă se notează* $\sphericalangle BOC = \alpha$, *să se arate că*

$$OA^2 = OB \cdot OC \cdot \cos \alpha.$$

2°. *Dacă* $D \in OA$, *iar* E *și* F *sînt proiecțiile lui respectiv pe* OB *și* OC, *să se demonstreze că*

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 = 2\,OD^2 \sin^2 \alpha.$$

3°. *Să se demonstreze că volumul* V' *al piramidei* $ODEF$ *este dat de relația*

$$V' = \lambda^3 V \cos^2 \alpha,$$

în care $\lambda = \frac{OD}{OA}$, *iar* V *este volumul piramidei* $OABC$.

4°. *Cum trebuie să fie piramida* $OABC$ *pentru ca triunghiul* DEF *să fie echilateral?*

(Concursul G.M., 1937)

R e z o l v a r e. De data aceasta avem un exemplu de problemă de relații metrice în spațiu.

1°. Triunghiurile dreptunghice OAB, OAC, BAC dau (fig. 4.9)

$$OB^2 = OA^2 + AB^2,\ OC^2 = OA^2 + AC^2,\ AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

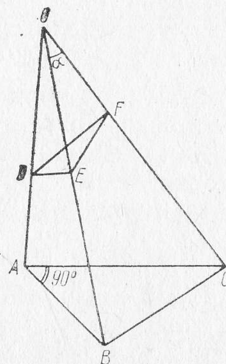


Fig. 4.9

de unde

$$OB^2 + OC^2 = 2OA^2 + BC^2.$$

Însă în triunghiul OBC avem (teorema cosinusului)

$$OB^2 + OC^2 - BC^2 = 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \alpha,$$

deci

$$OA^2 = OB \cdot OC \cdot \cos \alpha. \qquad (4.1)$$

2°. În mod asemănător în triunghiurile dreptunghice ODE și ODF putem scrie

$$OE^2 + ED^2 = OD^2,\ OF^2 + FD^2 = OD^2$$

și adunînd

$$OE^2 + OF^2 + ED^2 + FD^2 = 2OD^2.$$

Însă, din triunghiul OEF, teorema lui Pitagora generalizată dă

$$OE^2 + OF^2 = EF^2 + 2 \cdot OE \cdot OF \cdot \cos \alpha,$$

care, înlocuită în relația precedentă, duce la

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 = 2(OD^2 - OE \cdot OF \cdot \cos \alpha). \qquad (4.2)$$

Din $\triangle OED \sim \triangle OAB$ și $\triangle OFD \sim \triangle OAC$ se găsesc

$$OE = \frac{OD \cdot OA}{OB},\ OF = \frac{OD \cdot OA}{OC}$$

și prin înmulțire, ținînd seama de relația (4.1),

$$OE \cdot OF = \frac{OD^2 \cdot OA^2}{OB \cdot OC} = OD^2 \cos \alpha. \qquad (4.3)$$

Înlocuind în (4.2), rezultă

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 = 2OD^2(1 - \cos^2\alpha) = 2OD^2 \sin^2\alpha.$$

3°. Dacă notăm cu h și H înălțimile duse din D și A pe planul OBC, atunci putem scrie

$$V' = \frac{1}{3} S_{OEF} \cdot h,\ V = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot H,$$

de unde

$$\frac{V'}{V}=\frac{S_{OEF}}{S_{OBC}}\cdot\frac{h}{H}.$$

Triunghiurile OEF și OBC avînd unghiul α comun, raportul ariilor este dat de (vezi 3.9.2)

$$\frac{S_{OEF}}{S_{OBC}}=\frac{OE\cdot OF}{OB\cdot OC}=\frac{OD^2}{OA^2}\cos^2\alpha=\lambda^2\cos^2\alpha$$

[rezultă din (4.1) și (4.3)]. De altă parte, este evident că $\frac{h}{H}=\frac{OD}{OA}=\lambda$, deci înlocuind acestea în raportul volumelor, se găsește

$$\frac{V'}{V}=\lambda^3\cos^2\alpha\Rightarrow V'=\lambda^3 V\cos^2\alpha.$$

4°. Dacă $DE=DF$, atunci triunghiurile dreptunghice ODE și ODF sînt egale (OD comună) $\Rightarrow OE=OF$ și $\sphericalangle DOE=\sphericalangle DOF$. Atunci însă și OAB, OAC sînt egale $\Rightarrow OB=OC$ și $AB=AC$. Se deduce $EF\parallel BC$, apoi $BC=AB\sqrt{2}$. Din asemănări de triunghiuri avem

$$\frac{EF}{BC}=\frac{OE}{OB}\Rightarrow EF=\frac{OE}{OB}\cdot BC=\frac{OE}{OB}\cdot AB\sqrt{2}$$

și

$$\frac{DE}{AB}=\frac{OE}{OA}\Rightarrow DE=\frac{OE}{OA}\cdot AB.$$

Condiția $EF=DE$ duce la $OB=OA\sqrt{2}$, deci $\triangle OAB$ este un triunghi dreptunghic isoscel ($OA=AB$). Prin urmare, $AO=AB=AC$, deci $\triangle OBC$ este echilateral. Într-adevăr, dacă sînt îndeplinite aceste condiții:

$$\sphericalangle DOE=45°\Rightarrow DE=OE,$$

dar $\triangle OEF$ este echilateral, deci $OE=EF$. Rezultă $DE=DF=EF$, oricare ar fi $D\in OA$.

Problema 12. *Se dă un paralelogram $ABCD$ ($AB>BC$) situat în planul (π). Pe perpendicularele duse în A, B, C, D pe planul (π) se iau segmentele $AA'=m$, $BB'=n$, $CC'=p$, $DD'=q$, așezate de aceeași parte față de plan. Notînd $AB=a$, $BC=b$ și diagonalele $AC=\delta$, $BD=\delta'$, se cere:*

a) *Relația care trebuie să existe între m, n, p, q pentru ca $A'B'C'D'$ să fie o figură plană. Să se arate că această figură este un paralelogram.*

b) *Să se demonstreze că dacă $A'B'C'D'$ este dreptunghi, atunci pe lîngă condiția precedentă, trebuie ca*

$$mp-nq=\frac{\delta^2-\delta'^2}{4}.$$

c) *Dacă $A'B'C'D'$ este pătrat, atunci pe lîngă relațiile precedente, mai există și relația*

$$(p-m)(q-n)=a^2-b^2.$$

Rezolvare. a) $A'C'\in$ pl. $(A'ACC')$; $B'D'\in$ pl. $(B'BDD')$. Dacă figura $A'B'C'D'$ este plană, atunci dreptele $A'C'$ și $B'D'$, care nu sînt paralele, se intersectează într-un punct O' situat pe dreapta comună planelor $(A'ACC')$, $(B'BDD')$ care este perpendiculară în O pe planul (π). Prin urmare, $OO'\perp(\pi)\Rightarrow OO'\parallel AA'\parallel BB'$ etc. În trapezele $A'ACC'$ și $B'BDD'$, OO' unește mijloacele laturilor neparalele, deci (fig. 4.10)

$$OO'=\frac{m+p}{2}=\frac{n+q}{2},$$

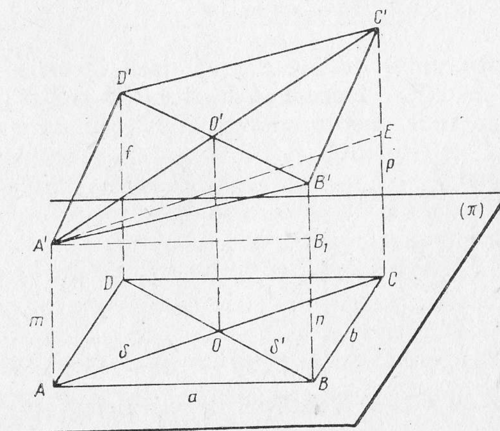


Fig. 4.10

de unde rezultă relația cerută

$$m + p = n + q. \quad (4.4)$$

Deoarece O' este atît mijlocul lui $A'C'$, cît și mijlocul lui $B'D'$, diagonalele se taie una pe alta în părți egale, deci $A'B'C'D'$ este paralelogram.

Reciproc, dacă O' este mijlocul lui $A'C'$ și O'' mijlocul lui $B'D'$ și se dă relația $m + p = n + q$, figura $A'B'C'D'$ este plană și anume este paralelogram. Într-adevăr, $OO' = \frac{m+p}{2}$, $OO'' = \frac{n+q}{2}$ și în baza relației date rezultă $OO' = OO''$, deci $O' \equiv O''$.

b) Paralelogramul $A'B'C'D'$ devine dreptunghi dacă diagonalele sînt egale. Pentru calculul diagonalei $A'C'$ ducem $A'E \parallel AC$, deci $A'E \perp CC'$. Triunghiul $A'EC'$ ne dă

$$A'C'^2 = A'E^2 + EC'^2 \Rightarrow A'C'^2 = \delta^2 + (p - m)^2.$$

În mod analog, $B'D'^2 = \delta'^2 + (q-n)^2$. Dacă $A'C' = B'D'$, atunci

$$\delta^2 + (p - m)^2 = \delta'^2 + (q - n)^2 \Rightarrow \delta^2 + (p + m)^2 - 4mp =$$
$$= \delta'^2 + (q + n)^2 - 4nq.$$

Ținînd seama de (4.4), rămîne

$$mp - nq = \frac{\delta^2 - \delta'^2}{4}. \quad (4.5)$$

c) Dreptunghiul devine pătrat dacă laturile sînt egale, adică $A'B' = B'C'$. Ducem $A'B_1 \parallel AB (B_1 \in BB')$ și se formează triunghiul dreptunghic $A'B_1B'$, în care $A'B_1 = a$, $B_1B' = n - m$. Rezultă

$$A'B'^2 = a^2 + (n - m)^2 \quad \text{și} \quad \text{analog} \quad B'C'^2 = b^2 + (p - n)^2.$$

Trebuie deci ca

$$a^2 + (n - m)^2 = b^2 + (p - n)^2,$$

de unde

$$a^2 - b^2 = (p - n)^2 - (n - m)^2 = (p + m - 2n)(p - m).$$

Dar $p + m = q + n$ (condiția de paralelogram), astfel că

$$a^2 - b^2 = (p - m)(q - n). \quad (4.6)$$

4.5. Cîteva locuri geometrice de bază în geometria în spațiu

1) Locul geometric descris de un punct care păstrează constantă distanța pînă la *un punct fix* (centru) este o *sferă*.

2) Locul geometric descris de un punct care păstrează constantă distanța pînă la o *dreaptă fixă* este o *suprafață cilindrică*, avînd dreapta fixă drept axă de rotație.

3) Locul geometric al unui punct care are distanța constantă la *un plan* dat este compus din *două plane* paralele cu planul dat, la egală depărtare de acesta.

4) Locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele unui segment este *planul mediator* al acelui segment.

5) Locul geometric al punctelor egal depărtate de fețele unui *unghi diedru* este *planul bisector* al acelui diedru.

6) Locul geometric al punctelor egal depărtate de *două plane concurente* este alcătuit din cele *două plane bisectoare* (perpendiculare între ele) ale unghiurilor diedre pe care le formează planele concurente.

7) Locul geometric al punctelor egal depărtate de două *plane paralele* este *planul echidistant* față de ele.

8) Se consideră un plan P și un punct fix O exterior planului. Fie $M \in P$ și $N \in OM$ astfel ca $\frac{ON}{OM} = k$. *Locul geometric al punctului N, atunci cînd M se mișcă în tot planul P, este un plan $Q \parallel P$*, astfel că, dacă notăm cu d_q, d_p distanțele punctului O la cele două plane, avem

$$\frac{d_q}{d_p} = k.$$

9) Fiind date două puncte fixe A, B și un punct mobil M care satisface relația $MA^2 - MB^2 = k =$ const, *locul geometric descris de punctul M este un plan perpendicular pe AB*. Aceasta se deduce din locul geometric corespunzător în geometria plană, rotind figura în jurul dreptei AB.

10) Locul geometric al punctelor care au *suma pătratelor* distanțelor la două puncte fixe A și B constantă este o *sferă*. Locul geometric se obține ca și în cazul precedent, din problema de geometrie plană (vezi 3.7, problema 6) prin rotirea figurii în jurul dreptei AB.

Iată acum și cîteva aplicații.

Problema 13. *Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două drepte concurente.*

R e z o l v a r e. Fie Δ, Δ' dreptele concurente în O și M un punct al locului geometric care se proiectează în N pe planul celor două drepte. Fie apoi P, Q picioarele perpendicularelor duse din N respectiv pe Δ și Δ' (fig. 4.11). Potrivit teoremei celor trei perpendiculare, $MP \perp \Delta$ și $MQ \perp \Delta'$, deci MP și MQ sînt distanțele de la M la cele două drepte; dar față de planul (Δ, Δ') ele sînt *oblice*. Pentru ca $MP=MQ$ trebuie ca picioarele lor să fie egal depărtate de piciorul perpendicularei, adică $NP = NQ$, deci N se află pe una din bisectoarele unghiurilor formate de Δ, Δ' (în figură pe bisectoarea unghiului ascuțit). Însă dacă punctul M se proiectează pe o bisectoare, acesta aparține planului care conține acea bisectoare și este perpendicular pe planul (Δ, Δ'). La fel pentru a doua bisectoare. Prin urmare, *mulțimea punctelor* care satisfac enunțul este compusă din cele două plane care conțin bisectoarele unghiurilor formate de Δ, Δ' și sînt perpendiculare pe planul (Δ, Δ'). Acesta este locul geometric căutat, alcătuit din două plane perpendiculare.

O b s e r v a ț i e. Dacă $\Delta \parallel \Delta'$, atunci locul geometric al punctelor egal depărtate de cele două drepte este planul perpendicular pe planul determinat de Δ, Δ', care conține dreapta echidistantă situată în planul lor.

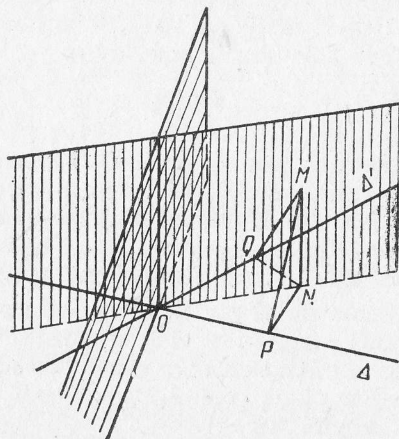


Fig. 4.11

Problema 14. *Să se găsească locul geometric al punctelor M egal depărtate de trei puncte date A, B, C necoliniare.*

R e z o l v a r e. *Metoda I.* Notăm cu O proiecția punctului M pe planul (ABC). Deoarece oblicele $MA=MB=MC$, picioarele lor A, B, C trebuie să fie egal depărtate de piciorul O al perpendicularei MO, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Locul geometric cerut este perpendiculara pe planul (ABC) care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

Metoda II. Toate punctele egal depărtate de A și B se găsesc în planul mediator π_{AB} al laturii AB; toate punctele egal depărtate de B și C se găsesc în planul mediator π_{BC} al laturii BC. Fie $\Delta = \pi_{AB} \cap \pi_{BC} \Rightarrow \Delta \perp$ planul (ABC). Orice punct $M \in \Delta$ este egal depărtat de A, B și de B, C, deci de A, B și C, prin urmare, satisface enunțul; Δ este locul geometric căutat. În particular, dacă $O \equiv \Delta \cap$ pl. (ABC), avem $OA = OB = OC$, adică Δ trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

O b s e r v a ț i e. Se deduce imediat că al treilea plan mediator π_{CA} trece prin Δ, astfel că cele trei plane mediatoare ale laturilor unui triunghi trec prin aceeași dreaptă $\Delta \perp$ pl. (ABC), dusă prin centrul cercului circumscris lui ABC.

Problema 15. *Să se determine locul punctelor din spațiu egal depărtate de trei drepte situate în același plan, care nu sînt concurente.*

R e z o l v a r e. În general, trei drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3 care nu sînt concurente, dar sînt situate în același plan (π), determină un triunghi ABC ($A \equiv \Delta_2 \cap \Delta_3$, $B \equiv \Delta_3 \cap \Delta_1$ etc.). Dacă M este un punct din spațiu, I proiecția lui pe planul (ABC) și M_1, M_2, M_3 proiecțiile lui pe dreptele Δ_1, Δ_2, Δ_3, rezultă pe baza reciprocei teoremei celor trei perpendiculare că $IM_1 \perp \Delta_1$, $IM_2 \perp \Delta_2$ și $IM_3 \perp \Delta_3$. Însă $MM_1 = MM_2 = MM_3 \Rightarrow IM_1 = IM_2 = IM_3$ (vezi și problema 12). În planul unui triunghi ABC există *patru puncte* egal depărtate de laturile unui triunghi (și a prelungirilor lor), anume *centrul I al cercului înscris* triunghiului și *centrele*

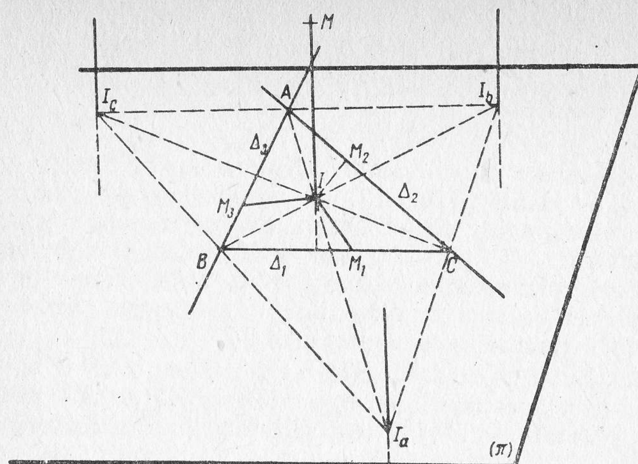


Fig. 4.12

I_a, I_b, I_c *ale cercurilor exînscrise* (fig. 4.12). Aşadar, oricare ar fi M situat pe una din perpendicularele duse prin I, I_a, I_b, I_c pe planul (ABC), acesta satisface cerinţele enunţului. Locul geometric este astfel alcătuit din *patru drepte* perpendiculare pe planul $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$.

Discuţie. Toate consideraţiile de mai înainte privesc cazul în care cele trei drepte formează un triunghi. Se poate însă întîmpla ca dreptele să nu fie concurente, dar $\Delta_1 \parallel \Delta_2$, iar Δ_3 le intersectează în A şi B. În acest caz, bisectoarele unghiurilor din A şi B, situate de o parte a lui Δ_3, se întîlnesc în I_1 şi cele situate în partea opusă se întîlnesc în I_2, astfel încît AI_1BI_2 este un dreptunghi, iar I_1I_2 este dreapta echidistantă faţă de Δ_1 şi Δ_2. În acest caz, locul geometric este alcătuit din perpendicularele în I_1, I_2 pe planul (Δ_1, Δ_2), deci numai din două drepte.

În sfîrşit, dacă $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \parallel \Delta_3$, problema nu are soluţie.

Am ales acest exemplu, clasic dealtfel, pentru a pune în evidenţă un loc geometric format din mai multe drepte.

O b s e r v a ţ i e. Se poate da o altă soluţie pornind de la problema 13 şi folosind metoda intersecţiei locurilor geometrice. Astfel, locul punctelor egal depărtate de Δ_2, Δ_3 este format din planele perpendiculare pe planul (ABC), care conţin bisectoarele unghiului A etc. Dacă considerăm planele loc geometric interioare triunghiului ABC, ele se intersectează după o dreaptă perpendiculară pe planul (ABC) care trece prin centrul cercului înscris etc.

Problema 16. *Să se determine mulţimea punctelor din spaţiu care sînt egal depărtate de două puncte date A, B şi care se află la o distanţă dată d de un plan dat P.*

R e z o l v a r e a se bazează pe metoda intersecţiei locurilor geometrice. Într-adevăr, dacă lăsăm la o parte a doua condiţie, atunci locul geometric al punctelor egal depărtate de A şi B este planul mediator π al segmentului AB (fig. 4.13). Dacă lăsăm la o parte prima condiţie, atunci toate punctele care au distanţa d la planul P se găsesc în două plane paralele Q, R, de o parte şi de alta a lui P. Punctele care satisfac deodată ambele condiţii se găsesc la intersecţia celor două locuri geometrice, adică a planului mediator π cu planele Q şi R. Mulţimea căutată (care constituie un loc geometric) este formată din punctele dreptelor $\Delta_1 \equiv \pi \cap Q$ şi $\Delta_2 \equiv \pi \cap R$.

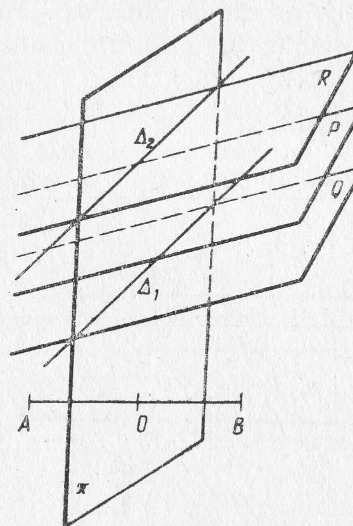


Fig. 4.13

Discuție. a) Dacă planul π întîlnește planul Q, întîlnește și pe $R \parallel Q$, deci soluția problemei este mulțimea celor două drepte $\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

b) Dacă $P \perp AB \Rightarrow P \parallel \pi \Rightarrow Q \parallel R \parallel \pi$ și problema nu are soluție.

Problema 17. *Să se determine mulțimea dreptelor care trec printr-un punct dat A și determină între două plane paralele segmente de lungime dată l.*

Rezolvare. Pornim de la teorema că *toate segmentele paralele cuprinse între două plane paralele sînt egale între ele.* Prin urmare, problema care se pune este de a determina direcțiile de drepte care determină între cele două plane date $P \parallel Q$ segmente de lungime l. În acest scop, alegem un punct arbitrar $M_0 \in P$ și ducem oblica $M_0N_0 = l$ față de planul Q. Toate oblicele de lungime l au picioarele egal depărtate de proiecția O a lui M_0 pe planul Q, deci se găsesc pe cercul cu centrul O și raza ON_0 (fig. 4.14). Acestea formează *un con* de rotație cu vîrful M_0 și baza cercul (O).

Construcția cercului (O) se poate realiza fie ducînd în planul Q cercul cu centrul O și raza $ON_0 = \sqrt{l^2 - d^2}$, unde $d = M_0O$, fie ca intersecție cu planul Q a sferei cu centrul M_0 și raza $R = l$.

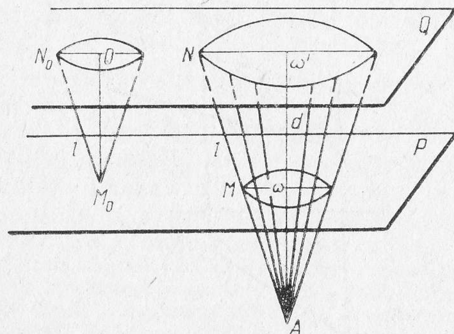


Fig. 4.14

Dacă prin A se duc paralele la generatoarele conului cu vîrful în M_0, se obține un nou con cu vîrful în A. Generatoarele acestui con constituie *mulțimea dreptelor cerută în enunț.* Într-adevăr, dacă luăm generatoarea paralelă cu M_0N_0, aceasta determină între planele P și Q segmentul $MN \parallel M_0N_0 \Rightarrow MN = M_0N_0 = l$ etc. Locul geometric cerut prin enunț este deci *o suprafață conică.*

Ca observație finală, rezultă că *locul geometric al segmentelor de lungime dată l, cuprinse între două plane paralele, astfel ca dreptele-suport să treacă printr-un punct fix, este un trunchi de con.*

Discuție. a) Dacă $l > d = M_0O$ (distanța între P și Q), problema are soluție, așa cum s-a văzut mai înainte.

b) Dacă $l = d$, mulțimea conține o singură dreaptă: perpendiculara din A pe P și Q.

c) Dacă $l < d$, problema nu are soluție.

Problema 18. *Se dau două plane paralele și un punct A între ele. Să se ducă prin A o dreaptă care să intersecteze planele paralele în M și N astfel ca $AM - AN = l$ (lungime dată).*

Rezolvare. Notăm P, Q planele paralele și considerăm punctul A mai aproape de planul Q astfel că $AN < AM$ $(M \in P)$. Pentru a obține un segment egal cu $AM - AN$ este de ajuns să luăm simetricul N' al lui N față de A și atunci $AM - AN = MN'$ (fig. 4.15). Să observăm că atunci

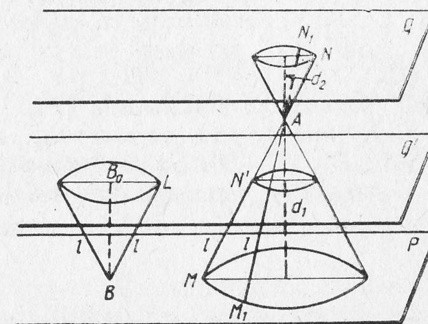


Fig. 4.15

cînd N descrie planul Q, punctul N' descrie planul Q', simetricul lui Q în raport cu A, adică $Q' \parallel Q \parallel P$. Dacă notăm cu d_1, d_2 distanțele lui A la planele P și Q, atunci distanța între P și Q' este $d_1 - d_2$.

Rămîne să determinăm o dreaptă MN astfel ca $MN' = l$. Pentru aceasta, alegem arbitrar $B \in P$ și ducem oblicele egale cu l față de planul Q' (vezi problema precedentă), care au picioarele egal depărtate de proiecția B_0 a lui B pe Q'. Mulțimea acestor oblice formează o suprafață conică (S), avînd ca axă de rotație BB_0. Orice paralelă dusă prin A la una din generatoarele BL ale suprafeței (S) este o soluție a problemei, deoarece $MN' = BL = l$ și $MN' = AM - AN$.

Discuție. a) Dacă $l > d_1 - d_2$ problema admite o infinitate de soluții, anume mulțimea paralelelor duse prin A la generatoarele conului (S). Ele determină între planele P și Q două conuri opuse la vîrf în A, avînd înălțimile respectiv d_1 și d_2, astfel că diferența între generatoarele lor este l.

b) Dacă $l = d_1 - d_2$, problema admite o singură soluție, anume $MAN \perp P$.

c) Dacă $l < d_1 - d_2$, problema nu are nici o soluție. În cazul cînd A este mai apropiat de P decît de Q $(d_1 < d_2)$, se consideră planul P', simetricul lui P față de A și se reface soluția luînd $B \in Q$.

Problema 19.
a) *Două plane paralele* (P), (Q) *sînt intersectate de trei drepte oarecare* Δ_1, Δ_2, Δ_3 *respectiv în* A, B, C *și* A', B', C'. *Să se demonstreze că mijloacele segmentelor* AA', BB', CC' *se găsesc într-un plan paralel cu* P *și* Q.
b) *Planele paralele și echidistante* (P), (Q), (R) (Q *între* P *și* R) *taie dreptele oarecare* Δ_1, Δ_2 *respectiv în* A, B; A', B'; A'', B''. *Să se demonstreze că* $A'B'$ *este egal și paralel cu jumătatea diagonalei care pleacă din* A'', *a paralelogramului construit cu vectorii* $\overline{A''B''}$ *și* $\overline{AB}$.

R e z o l v a r e. a) Fie A_0, B_0, C_0 mijloacele segmentelor AA', BB', CC'. În baza teoremei: *trei plane paralele determină pe două drepte oarecare segmente proporționale*, rezultă că planul $(\pi) \parallel (P)$ dus prin A_0 trece prin B_0 și prin C_0 și cum B_0, C_0 sînt unice, planul (π) este unic determinat.

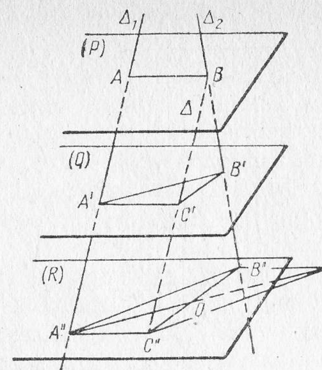


Fig. 4.16

b) Ducem prin B o dreaptă $\Delta \parallel \Delta_1$ și notăm $C' \equiv \Delta \cap (Q)$, $C'' \equiv \Delta \cap (R)$. Avem evident $AB \parallel A'C' \parallel A''C''$ și $AB = A'C' = A''C''$. În planul $BC''B''$ segmentul $B'C'$ unește mijloacele a două laturi ale triunghiului $BB''C''$, deci $B'C' \parallel B''C''$ și $B'C' = \frac{1}{2}B''C'' = C''O$ (O fiind mijlocul lui $B''C''$). Rezultă imediat că triunghiurile $A'C'B'$ și $A''C''O$ cu două din laturi egale, paralele, (fig. 4.16), îndreptate în același sens și situate în plane paralele, sînt egale, deci $A'B' \# A''O$. Dar $A''O$ este jumătatea diagonalei care pleacă din A'', a paralelogramului construit cu vectorii $\overline{A''C''} = \overline{AB}$ și $\overline{A''B''}$. Proprietatea este demonstrată.

Problema 20. *Se dau două drepte* (D) *și* (Δ). *Să se determine pe dreapta* (Δ) *punctele care au față de dreapta* (D) *o distanță dată* a.

R e z o l v a r e. Folosim metoda intersecției locurilor geometrice. Dacă lăsăm la o parte condiția ca punctele să se afle pe (Δ), atunci locul geometric al punctelor care au dis-

Fig. 4.17

tanța a față de dreapta (D) este o suprafață cilindrică de rotație în jurul dreptei (D), avînd ca secțiune dreaptă un cerc de rază a (fig. 4.17). Acesta este primul loc geometric.

Al doilea este acela al punctelor situate pe (Δ), adică chiar dreapta (Δ). Punctele care satisfac ambele condiții se află la intersecția celor două locuri geometrice, deci acolo unde dreapta (Δ) înțeapă suprafața cilindrică.

Discuție. Se poate ca (Δ) să înțepe suprafața cilindrică în două puncte M_1, M_2, se poate să o intersecteze în două puncte confundate M sau se poate să nu o întîlnească.

În cazul cînd (Δ) este tangentă suprafeței cilindrice în M, fie N proiecția lui M pe (D). Avem evident $MN \perp (D)$, dar $MN \perp (\Delta)$ care este tangentă la cilindru (deci conținută în planul tangent perpendicular pe MN). Deoarece MN este perpendiculară și pe (D) și pe (Δ), MN se numește *perpendiculara comună* celor două drepte oarecare. De aici rezultă că dacă notăm cu d perpendiculara comună a dreptelor (D) și (Δ), putem avea următoarele situații:

1) $d < a \Rightarrow$ dreapta (Δ) înțeapă cilindrul în două puncte și problema are două soluții.

2) $d = a \Rightarrow$ (Δ) tangentă suprafeței cilindrice și problema are o singură soluție.

3) $d > a$, problema nu are nici o soluție.

1. Se dau trei plane care trec prin aceeași dreaptă (Δ) și un punct M exterior lor. Să se ducă prin punctul M un plan care să taie cele trei plane date după trei drepte paralele, astfel ca una din ele să fie dreapta echidistantă față de celelalte două.

2. a) Se consideră în spațiu un patrulater strîmb oarecare $ABCD$. Să se demonstreze că orice plan (π) paralel deodată cu două muchii opuse AB și CD determină pe celelalte două muchii segmente proporționale.

b) Fie $M \equiv (\pi) \cap BC$ și $N = (\pi) \cap DA$. Să se determine locul geometric al mijlocului segmentului MN cînd planul (π) se deplasează rămînînd paralel deodată cu AB și CD.

3. Se dau două plane (P) și (Q), o dreaptă (D) nesituată în aceste plane și un punct $O \in (P)$. Să se așeze un segment AB, de lungime dată l, $A \in (P)$, $B \in (Q)$, astfel ca $AB \parallel (D)$ iar A să fie la o distanță dată a de O. Discuție.

4. Fie Ox, Oy, Oz muchiile unui triedru oarecare.

a) Să se demonstreze că secțiunile făcute în triedru prin plane paralele sînt triunghiuri asemenea.

b) Să se găsească locul geometric al centrelor de greutate ale acestor triunghiuri.

5. Să se arate cum se poate determina un plan, pe care un triunghi oarecare să se proiecteze ca triunghi isoscel.

6. Se dau în spațiu patru puncte A, B, C, D nesituate în același plan și o dreaptă (δ). Să se ducă prin două din punctele date un plan (P), iar prin celelalte două cîte un plan paralel cu (P) astfel ca cele trei plane să determine pe (δ) două segmente egale. Discuție.

7. Se dă în spațiu un patrulater strîmb $ABCD$ și se duc segmentele: DD' egal și paralel cu CB, în sensul CB, BB'

egal și paralel cu AD, în sensul AD. Să se demonstreze că dreapta care unește picioarele medianelor care pleacă din B și D în triunghiurile $BB'C$ și $DD'A$, împreună cu diagonala BD determină un plan.

8. Fiind dat un patrulater oarecare $ABCD$, plan sau strîmb, și un punct M din spațiu, să se găsească locul geometric al punctului M, știind că $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2 =$ const.

9. Fie A, B, C trei puncte situate de aceeași parte a unui plan ε, care nu sînt în linie dreaptă, iar planul ABC nu este paralel cu planul ε. Fie apoi A', B', C' trei puncte în planul ε. Notăm cu L, M, N respectiv mijloacele segmentelor AA', BB', CC' și cu G centrul de greutate al triunghiului LMN (se exclude cazul cînd punctele L, M, N nu formează un triunghi). Să se afle locul geometric al punctului G atunci cînd punctele A', B', C' se mișcă în planul ε, independent unele de altele.

(Olimpiada internațională de matematică, 1961).

10. Se dau în spațiu un punct A, un plan (P) și două drepte oarecare (D), (Δ); punctul A nu se află în planul (P) sau pe una din drepte, iar (D) sau (Δ) nu aparțin planului (P). Să se construiască un triunghi isoscel ABC, cu condițiile $B \in (P)$, $C \in (D)$ și $BC \parallel (\Delta)$.

5

POLIEDRE, CILINDRUL, CONUL, SFERA

5.1. Definiție. Se numește *poliedru* orice corp mărginit în toate părțile de fețe plane, care se intersectează două cîte două.

Planele care mărginesc corpul determină prin intersecțiile lor *muchiile, fețele și vîrfurile* poliedrului. Două plane corespunzătoare unei muchii formează un unghi diedru, dar în fiecare vîrf se întîlnesc mai multe plane care închid între ele un *unghi poliedru*, adică format din mai multe fețe.

Cel mai simplu poliedru este piramida triunghiulară, care se mai numește și *tetraedru*, adică mărginit de patru fețe. Tetraedrul are patru vîrfuri și din fiecare vîrf pornesc trei muchii și trei fețe care formează un *unghi triedru*.

Alte poliedre sînt: prisma, paralelipipedul, piramida, trunchiul de piramidă etc.

Așa cum orice poligon se poate descompune în triunghiuri, orice poliedru se poate descompune în tetraedre; prin urmare, corespondentul triunghiului în spațiu este tetraedrul.

Multe din proprietățile triunghiului se transpun în spațiu la tetraedru, *dar nu toate*. Astfel planele mediatoare ale celor *șase muchii* trec prin același punct, *centrul sferei circumscrise* tetraedrului; cele *șase* plane bisectoare interioare sînt concurente în *centrul sferei înscrise* tetraedrului etc., dar cele *patru înălțimi nu mai sînt concurente decît în cazul unui tetraedru particular, care se și numește din această cauză ortocentric* (care are ortocentru).

5.2. Pentru ca proprietățile poliedrelor să fie bine înțelese și temeinic însușite este necesar ca partea de geometrie în spațiu referitoare la punct, dreaptă, plan să fie perfect cunoscută. Iată un exemplu simplu. Pentru a demonstra teorema: *secțiunea făcută într-o piramidă oarecare, printr-un plan paralel cu baza, este un poligon asemenea cu poligonul de bază,* trebuie arătat că: a) laturile omoloage ale celor două poligoane sînt proporționale; b) unghiurile sînt respectiv egale.

Demonstrația se face cu ușurință, dar trebuie să fie bine cunoscute următoarele teoreme:

a) *două plane paralele sînt tăiate de un al treilea plan după drepte paralele;*

b) *unghiurile cu laturile paralele și la fel orientate sînt egale.*

Rezultă imediat că pe fiecare față a piramidei latura poligonului de secțiune este paralelă cu latura poligonului de bază. Laturile celor două poligoane fiind paralele, *unghiurile corespunzătoare sînt egale.*

Apoi pe fiecare față, în baza teoremei fundamentale a asemănării, se formează triunghiuri asemenea din care se deduce *proporționalitatea laturilor.*

5.3. Presupunînd cunoscută geometria referitoare la dreaptă și plan, dăm în cele ce urmează probleme care să pună în joc toate cunoștințele din școală și care să constituie o îndrumare pentru rezolvarea chestiunilor în legătură cu poliedrele și cu corpurile rotunde. Fiind vorba de o sinteză, unele probleme vor fi mai cuprinzătoare, ba chiar se va face apel la algebră sau trigonometrie pentru studierea lor completă.

Problema 1. *Se dă o suprafață prismatică (S) a cărei secțiune dreaptă este un dreptunghi și un punct oarecare M al spațiului. Să se ducă prin M un plan care să determine în suprafața (S) un paralelogram de laturi date a și b.*

Rezolvare. Începem cu următoarea observare: o serie de plane paralele determină într-o prismă secțiuni egale, care se obțin una din alta prin translație.

Problema se reduce deci la determinarea unui paralelogram de laturi a și b, situat pe suprafața prismei, apoi prin M se duce un plan paralel cu planul acestui paralelogram; acesta constituie soluția problemei.

Considerăm suprafața prismatică (mai scurt: prisma) (S) cu secțiunea dreaptă dreptunghiul $A_0B_0C_0D_0$ (fig. 5.1) și muchiile A_0X, B_0Y, C_0Z, D_0T. Presupunem $a > A_0B_0$, $b > B_0C_0$. Alegem un punct arbitrar $A_1 \in A_0X$, apoi din A_1 ca centru cu raza a descriem un cerc în planul XA_0B_0Y; acesta intersectează muchia B_0Y în B_1 și B_1'. În mod asemănător cercul cu centrul în A_1 și raza b (în planul XA_0D_0T) determină pe D_0T punctele D_1 și D_1'. Rezultă *patru* paralelograme cu laturile a, b pe fețele prismei și anume cele care au ca laturi perechile (A_1B_1, A_1D_1), (A_1B_1, A_1D_1'), (A_1B_1', A_1D_1), (A_1B_1', A_1D_1'). Pe figură s-a completat numai $A_1B_1C_1D_1$. Dacă prin M se duc cele *patru* plane paralele cu planele celor *patru paralelograme* de mai sus, se determină patru soluții ale problemei: $ABCD$, $A'B'C'D'$ etc.

Discuție. După cum s-a văzut, în condițiile date problema are patru soluții distincte. Dacă însă $a, b > \max(A_0B_0, B_0C_0)$, atunci se poate lua b pe fața XA_0B_0Y și a pe fața XA_0D_0T, deoarece nu s-a făcut nici o precizare pe care față să fie latura a. Rezultă deci încă *patru soluții* și problema are maximum *opt soluții*.

Dacă $a = A_0B_0$, $b > B_0C_0$, problema are numai două soluții, iar dacă $a > A_0B_0$, $b = B_0C_0$, tot două. Se exclude

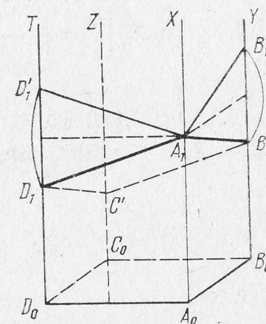


Fig. 5.1

cazul $a = A_0B_0$, $b = B_0C_0$ care dă dreptunghiul $A_0B_0C_0D_0$ și nu paralelogram. În rezumat, exceptînd cazul cînd $ABCD$ este dreptunghi, problema poate avea *opt soluții, patru, două sau nici o soluție* (dacă una din condiții nu este îndeplinită).

Problema 2. *Se îndoaie două colțuri opuse ale unui pătrat de tablă $ABCD$, după liniile EF, GH paralele cu diagonala AC și echidistante de aceasta ($E \in AB$; $G \in AD$), pînă cînd planele lor devin perpendiculare pe planul pătratului, în pozițiile $EB'F$, GHD'. Celelalte două colțuri se taie și se înlătură, iar fețele $EB'D'G$ și $FB'D'H$ se completează cu tablă. Se obține astfel o cutie prismatică. Latura a a pătratului fiind dată, se cere:*

a) *să se exprime aria tablei întrebuințate la confecționarea cutiei, în funcție de distanța de la vîrful B la linia de îndoire EF (nu se va ține seama de colțurile aruncate);*

b) *să se precizeze pozițiile liniilor de îndoire, astfel ca aria totală a cutiei să fie maximă.*

(Olimpiada matematică 1960, școli pedagogice)

Rezolvare. a) Prisma triunghiulară care se obține are ca baze EFB' și GHD'. Perimetrul bazei este $p = 2BE + EF = 2BE + BE\sqrt{2} = BE(2 + \sqrt{2})$. Din $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ rezultă imediat $\frac{BE}{BA} = \frac{x}{\frac{1}{2}BD} \Rightarrow BE = \frac{ax}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = x\sqrt{2}$, deci $p = 2x(\sqrt{2} + 1)$. Înălțimea prismei este $EG = BD - 2x = a\sqrt{2} - 2x$. Rezultă aria totală a cutiei, deci a tablei folosite:

$$S = 2x(1 + \sqrt{2})(a\sqrt{2} - 2x) + 2x^2$$

sau

$$S = 2(2 + \sqrt{2})ax - 2(2\sqrt{2} + 1)x^2.$$

b) Expresia lui S este un trinom (incomplet) de gradul al doilea al cărui termen în x^2 este negativ, deci care are un maxim pentru

$$x = \frac{(2 + \sqrt{2})a}{2(1 + 2\sqrt{2})} = \frac{(2 + \sqrt{2})(2\sqrt{2} - 1)}{14}a = \frac{3\sqrt{2} + 2}{14}a \approx 0,45a.$$

Problema 3. *Se dă piramida patrulateră $OABCD$ și punctele $M \in OA$, $N \in OB$, $P \in OC$. Să se determine punctul Q de intersecție a planului MNP cu muchia OD.*

Rezolvare. Notăm $R \equiv MN \cap AB$, $S \equiv NP \cap BC$, $T \equiv PM \cap CA$. Punctele R, S, T se află la intersecția planului (MNP) cu planul bazei $(ABCD)$, deci pe dreapta (Δ) comună celor două plane (fig. 5.2). Punctul $U \equiv QM \cap DA$ se află și el pe (Δ) ca intersecție a două drepte situate în cele două plane; prin urmare, $U \equiv DA \cap (\Delta)$. Rezultă imediat construcția punctului Q: se ia $U \equiv DA \cap (\Delta)$ și se unește cu M; dreapta MU taie pe OD în Q.

Observație. În locul punctului U s-ar fi putut lua $V \equiv QN \cap DB$ sau $W \equiv QP \cap DC$ și ținînd seama că $V, W \in (\Delta)$, punctul Q rezultă printr-o construcție asemănătoare.

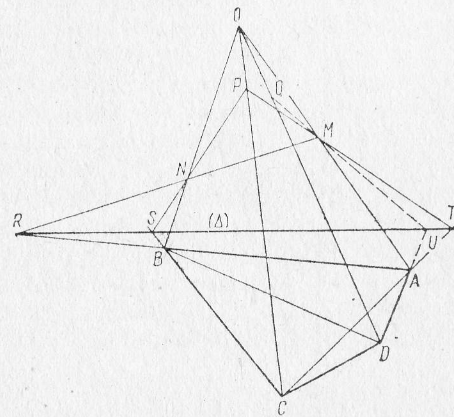


Fig. 5.2

Problema 4.

a) *Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru $ABCD$ bisectoarele unghiurilor BAC, BDC întîlnesc muchia BC în acelaşi punct M, atunci şi bisectoarele unghiurilor ABD, ACD întîlnesc muchia AD într-un acelaşi punct N.*

b) *Dacă şi bisectoarele unghiurilor CAD, CBD se întîlnesc pe muchia CD, atunci proprietatea este generală pentru orice pereche de feţe în raport cu muchia lor comună.*

c) *Care sînt relaţiile între muchii, care caracterizează astfel de tetraedre? Reciproca este adevărată?*

d) *Să se demonstreze că dacă $AC = BD$, atunci planul dus prin M, paralel cu dreptele AB şi CD, conţine dreapta MN.*

(Olimpiada matematică 1957)

Rezolvare. a) Pentru uşurinţa scrisului notăm lungimile muchiilor $BC = a$, $CD = b$, $DB = c$, $AD = \alpha$, $AB = \beta$, $AC = \gamma$, astfel ca muchiile opuse să fie (a, α), (b, β), (c, γ). Teorema bisectoarei pe feţele BAC, BDC ne dă (fig. 5.3):

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}, \quad \text{de unde} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{c}{b}$$

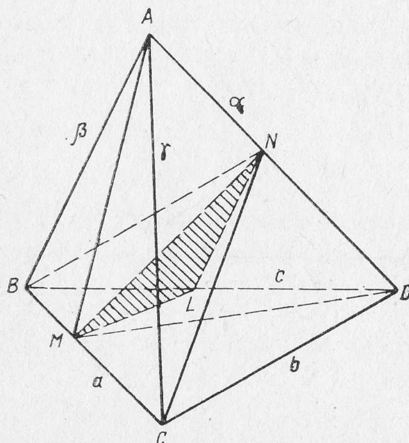


Fig. 5.3

sau

$$\beta b = \gamma c. \tag{5.1}$$

Trecînd la perechea de feţe care au muchia comună AD, teorema bisectoarei ne dă, în mod asemănător:

$$\text{pe faţa } ABD: \frac{NA}{ND} = \frac{\beta}{c}, \quad \text{pe faţa } ACD: \frac{NA}{ND} = \frac{\gamma}{b},$$

de unde rezultă

$$\frac{\beta}{c} = \frac{\gamma}{b} \quad \text{sau} \quad \beta b = \gamma c,$$

adică aceeaşi relaţie ca pentru feţele cu muchia comună BC. Cu aceasta, primul punct este demonstrat.

b) Dacă bisectoarele feţelor CAD, CBD se întîlnesc pe muchia CD în acelaşi punct P, atunci teorema bisectoarei, aplicată celor două feţe, dă

$$\frac{PC}{PD} = \frac{a}{c} = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \text{de unde } \alpha a = \gamma c.$$

Adăugată relaţiei (5.1), putem scrie

$$\alpha a = \beta b = \gamma c. \tag{5.2}$$

Simetria acestor relaţii arată că şi celelalte perechi de feţe, care au muchiile comune AB, AC, BD au aceeaşi proprietate, adică bisectoarele lor se întîlnesc pe muchia comună respectivă. De-altfel, verificarea se poate face direct.

c) Tetraedrele care satisfac proprietatea că *bisectoarele oricărei perechi de feţe se întîlnesc pe muchia lor comună* se caracterizează prin relaţiile (5.2), adică *produsul muchiilor opuse este acelaşi.*

Pentru ca într-adevăr relaţiile (5.2) să caracterizeze astfel de tetraedre trebuie arătat că şi reciproca este adevărată. Cu alte cuvinte, să ne asigurăm că nu mai există alte tetraedre care să satisfacă acele relaţii.

Presupunem deci dată relaţia $\beta b = \gamma c$. Ducem bisectoarele AM, DM' ale feţelor BAC, BDC, socotite diferite; putem scrie

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\beta}{\gamma} \quad \text{şi} \quad \frac{BM'}{M'C} = \frac{c}{b}$$

însă în baza relației date rezultă

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BM'}{M'C} \Rightarrow M' \equiv M.$$

La fel se procedează pentru celelalte perechi de fețe.

d) Să ducem $ML \parallel CD$ ($L \in BD$) și $NL' \parallel AB$ ($L' \in BD$). Avem

$$\frac{LB}{LD} = \frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{L'B}{L'D} = \frac{NA}{ND} = \frac{\beta}{c}.$$

Condiția necesară și suficientă ca MN, ML, NL' să fie în același plan este ca $L' \equiv L$, conform careia se poate scrie egalitatea $\frac{c}{b} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow c^2 = \beta b$. Dar

$$\beta b = \gamma c, \text{ deci } c^2 = \gamma c \Rightarrow \gamma = c \text{ sau } AC = BD.$$

Problema 5. *Să se demonstreze că planul bisector al unui diedru într-un tetraedru împarte muchia opusă în segmente proporționale cu ariile fețelor adiacente.*

R e z o l v a r e. Considerăm tetraedrul $ABCD$ și planul bisector care trece prin muchia BC și întîlnește muchia AD în E. Se proiectează punctele A și D pe planul bisector în A' și D', deci $A'D'$ este proiecția dreptei AD și ca atare trece prin E. Rezultă imediat asemănarea triunghiurilor dreptunghice $AA'E$ și $DD'E$, care dau (fig. 5.4)

$$\frac{AA'}{DD'} = \frac{AE}{ED}. \qquad (5.3)$$

Planul bisector împarte tetraedrul în alte două tetraedre și vom nota $V_1 =$ vol. $(ABCE)$, $V_2 =$ vol. $(DBCE)$. Punctul E are distanțe egale (d) în raport cu fețele ABC, DBC ale diedrului, prin urmare, luînd aceste fețe ca baze, putem scrie

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}} \quad (S_{ABC}, S_{DBC} \text{ fiind ariile fețelor}). \qquad (5.4)$$

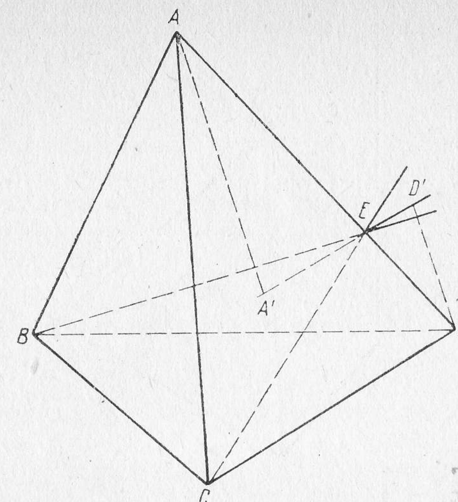


Fig. 5.4

Dar cele două tetraedre au fața comună BCE, care poate fi luată ca bază comună și atunci înălțimile sînt respectiv AA', DD'. Ca urmare, avem în baza relației (5.3)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{AA'}{DD'} = \frac{AE}{ED}. \qquad (5.5)$$

Comparînd cele două expresii din (5.4) și (5.5) ale raportului $\frac{V_1}{V_2}$, se deduce

$$\frac{AE}{ED} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}.$$

Există mai multe metode de a rezolva această problemă. De exemplu, se pot proiecta A și D pe muchia BC în A_1, D_1 și se folosesc triunghiurile asemenea AA_1A' și DD_1D'. Propunem ca studiu rezolvarea problemei pe această cale.

Problema 6. *Să se demonstreze că volumul unui tetraedru rămîne neschimbat atunci cînd două muchii opuse, de exemplu AB și CD, de mărimi constante, se deplasează pe dreptele pe care sînt situate (dreptele suport).*

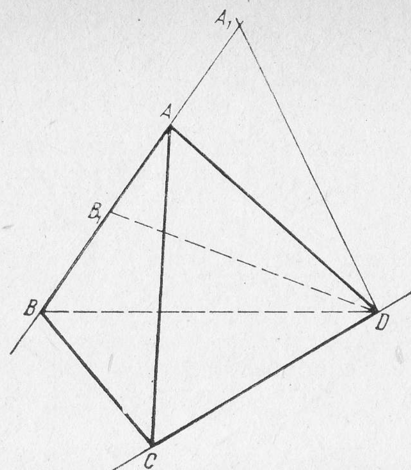


Fig. 5.5

R e z o l v a r e. Considerăm vîrfurile C și D fixe și deplasăm muchia AB pe dreapta suport AB. Aria triunghiului DAB (fig. 5.5) rămîne neschimbată, deoarece baza AB rămîne constantă, iar înălțimea dusă din C este *fixă*, anume perpendiculara din C pe dreapta AB. Trecînd acum la tetraedru, alegem pe DAB ca bază (de arie constantă, cum s-a arătat); înălțimea dusă din C pe planul bazei este și ea *fixă*, deoarece planul bazei este determinat de dreapta AB (fixă) și de punctul D (fix). Planul (DAB) fiind fix și punctul C fix, înălțimea din C a tetraedrului este fixă și *volumul tetraedrului rămîne constant.*

În mod cu totul asemănător se demonstrează că dacă ținem pe A și B fixe și mișcăm segmentul constant BC pe dreapta suport, volumul tetraedrului $ABCD$ rămîne constant.

Este evident acum că dacă se deplasează simultan muchiile AB și CD, de mărimi constante, pe dreptele lor suport, volumul tetraedrului rămîne neschimbat.

Problema 7. *Se consideră piramida patrulateră $OABCD$, cu baza dreptunghiul $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) și cu muchia $OA = h$ perpendiculară pe planul bazei. Se mai notează cu E, F mijloacele muchiilor OC, OD. Se cere:*

a) *aria totală a piramidei $OABCD$;*

b) *să se precizeze ce fel de patrulater este $ABEF$ și să i se calculeze aria în funcție de elementele date ale piramidei;*

c) *să se calculeze volumul piramidei $OABEF$ și al corpului rămas din piramida dată.*

R e z o l v a r e. a) Notînd cu S_0 aria bazei și cu S_t aria totală a piramidei, avem

$$S_t = S_0 + S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA}.$$

Le calculăm separat, observînd că toate fețele sînt triunghiuri dreptunghice. Într-adevăr pentru $\triangle OAB$ și $\triangle OAD$ faptul este evident, apoi în baza teoremei celor trei perpendiculare, rezultă imediat că $OB \perp BC$ și $OD \perp CD$. Astfel, $OA \perp$ pl. $(ABCD)$, $AB \perp BC \Rightarrow OB \perp BC$ etc. Se deduce (fig. 5.6):

$$S_0 = ab, \quad S_{OAB} = \frac{1}{2}ah, \quad S_{ODA} = \frac{1}{2}bh,$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 + h^2}, \quad S_{OCD} = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 + h^2},$$

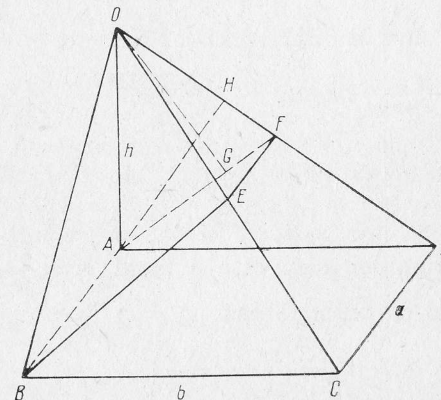


Fig. 5.6

așadar

$$S_t = ab + \frac{1}{2}(a+b)h + \frac{1}{2}a\sqrt{b^2+h^2} + \frac{1}{2}b\sqrt{a^2+h^2}. \quad (5.6)$$

b) Avem evident $EF \parallel CD \parallel AB$ și $EF = \frac{a}{2}$, deci $ABEF$ este trapez cu bazele a și $\frac{2}{a}$. În plus, $BA \perp$ pl. $(OAD) \Rightarrow$ $\Rightarrow BA \perp AF$, așadar trapezul este dreptunghic și are înălțimea $AF = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+h^2}$. Aria trapezului este deci

$$S_{ABEF} = \frac{3a}{4}\cdot\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2} = \frac{3a\sqrt{b^2+h^2}}{8}. \quad (5.7)$$

c) Pentru calculul volumului piramidei $OABEF$ cunoaștem aria bazei și mai trebuie să știm înălțimea. Ducem $OG \perp AF$ $(G \in AF)$ și $AH \perp OD$ $(H \in OD)$. Deoarece $BA \perp$ pl.$(OAD) \Rightarrow BA \perp OG$, deci $OG \perp AB$ și $OG \perp AF \Rightarrow OG \perp$ pl. $(ABEF)$ și OG este înălțimea căutată. Pentru a găsi expresia acestei înălțimi să observăm că în triunghiul isoscel OAF $\left(OF = FA = \frac{1}{2}AD\right)$, înălțimile din O și din A sînt egale; se deduce

$$OG = AH = \frac{hb}{OD} = \frac{hb}{\sqrt{h^2+b^2}}.$$

Prin urmare, volumul piramidei $OABEF$ este

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{ABEF}\cdot OG = \frac{1}{3}\cdot\frac{3a\sqrt{b^2+h^2}}{8}\cdot\frac{hb}{\sqrt{h^2+b^2}},$$

adică

$$V_1 = \frac{abh}{8}. \quad (5.8)$$

Volumul piramidei mari este evident $V = \frac{1}{3}abh$, de unde rezultă volumul corpului rămas:

$$V_2 = \frac{5}{24}abh = \frac{5}{8}V.$$

Pentru punctul c) se poate folosi problema 9.

Problema 8. *Dîndu-se o piramidă oarecare, să se determine planele de secțiune, paralele cu baza, care împart piramida în trei corpuri echivalente. Să se calculeze și ariile secțiunilor făcute de planele respective, în funcție de aria bazei.*

Rezolvare. Se știe că un plan paralel cu baza unei piramide determină o altă piramidă astfel că raportul volumelor celor două piramide este egal cu *cubul raportului* înălțimilor lor, sau, mai general, egal cu cubul raportului a *două elemente omoloage* din cele două piramide (laturi, muchii etc.). Să notăm aria secțiunii celei mai apropiate de vîrful O al piramidei cu S_1, aria secțiunii următoare cu S_2 și aria bazei cu S și volumele piramidelor, în aceeași ordine, cu V_1, V_2, V.

Dacă planele de secțiune împart piramida în trei corpuri echivalente, rezultă că (cititorul poate face cu ușurință o figură)

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{2}{3}.$$

Pe de altă parte, dacă h_1, h_2, h sînt înălțimile celor trei piramide cu vîrful în O, atunci

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 = \frac{2}{3} \Rightarrow h_2 = h\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

S-au determinat astfel distanțele față de vîrful O al piramidei, la care trebuie duse planele de secțiune paralele cu baza.

Se știe, de asemenea (din manual), că dacă o secțiune este paralelă cu baza, raportul ariilor celor două poligoane (asemenea) este dat de pătratul raportului a două elemente omoloage, deci și de pătratul raportului înălțimilor. Prin urmare:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \Rightarrow S_1 = \frac{S}{\sqrt[3]{9}} = \frac{S\sqrt[3]{3}}{3},$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{h_2}{h}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \Rightarrow S_2 = S\sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}S.$$

O b s e r v a ț i e. Nu s-a precizat poligonul de bază al piramidei, deoarece aceasta poate avea ca bază orice poligon regulat sau neregulat, cu orice număr de laturi. Teoremele folosite mai înainte sînt valabile în cazul general.

Problema 9. *Să se demonstreze următoarea teoremă: dacă două tetraedre au cîte un unghi triedru egal, atunci raportul volumelor lor este egal cu raportul produselor muchiilor situate pe triedrele respective.*

D e m o n s t r a ț i e. Această teoremă este extinderea în spațiu a teoremei privitoare la raportul ariilor a două triunghiuri care au cîte un unghi egal (vezi cap. 3), proprietate care dealtfel va fi folosită în demonstrație.

Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ cele două tetraedre care au triedrele cu vîrfurile A și A' egale. Putem presupune de la început triedrele suprapuse astfel că $A' \equiv A$, $B' \in AB$ etc. (fig. 5.7). Ducem perpendicularele BB_0 și $B'B'_0$ pe planul ACD; acestea proiectează dreapta AB pe planul ACD, deci A, B'_0, B_0 sînt coliniare. Dacă în cele două tetraedre se consideră ca baze ACD și $AC'D'$, atunci BB_0, $B'B'_0$ sînt înălțimile

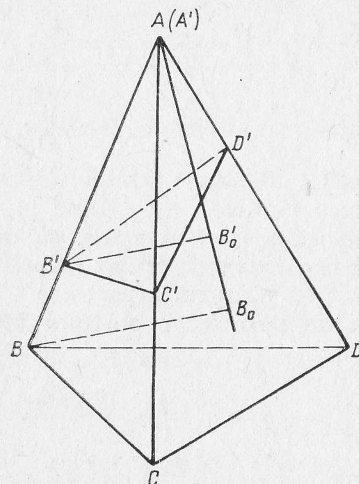


Fig. 5.7

corespunzătoare, prin urmare, notînd cu V, V' volumele respective, avem

$$\frac{V'}{V} = \frac{S_{AC'D'} \cdot B'B'_0}{S_{ACD} \cdot BB_0}.$$

Însă cele două baze au unghiul CAD comun, deci

$$\frac{S_{AC'D'}}{S_{ACD}} = \frac{AC' \cdot AD'}{AC \cdot AD}.$$

Apoi din asemănarea evidentă a triunghiurilor dreptunghice $AB'B'_0$, ABB_0 se deduce

$$\frac{B'B'_0}{BB_0} = \frac{AB'}{AB}.$$

Înlocuind toate acestea în raportul volumelor, rezultă

$$\frac{V'}{V} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD}. \qquad (5.9)$$

Problema 10. *Într-un trunchi de piramidă regulată bazele sînt pătrate avînd laturile respectiv L și l.*

a) *Să se arate că dacă apotema trunchiului de piramidă este media aritmetică a laturilor bazelor, înălțimea trunchiului este media lor geometrică.*
b) *Să se exprime cu ajutorul lui L și l volumul piramidei din care face parte trunchiul de piramidă.*
c) *Să se găsească cîtul dintre volumul și aria totală ale unui astfel de trunchi de piramidă.*
d) *Cunoscînd aria totală de 1 512 dm² și înălțimea de 12 dm, să se determine laturile bazelor trunchiului de piramidă.*

R e z o l v a r e. a) Fie $ABCDA'B'C'D'$ trunchiul de piramidă, M și M' mijloacele laturilor AB, $A'B'$ și N proiecția lui M' pe planul $ABCD$. Potrivit ipotezei apotema piramidei este $MM' = \frac{L+l}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic $M'NM$, în care $MN = \frac{L-l}{2}$, rezultă (fig. 5.8)

$$h^2 = M'N^2 = \left(\frac{L+l}{2}\right)^2 - \left(\frac{L-l}{2}\right)^2 = Ll \Rightarrow h = \sqrt{Ll}.$$

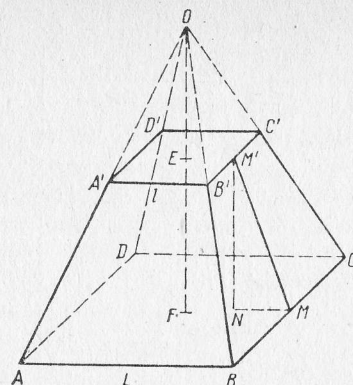


Fig. 5.8

b) Piramida întreagă fiind $OABCD$, notăm cu x înălțimea OE a piramidei $OA'B'C'D'$ și ținem seama că raportul înălțimilor este egal cu raportul laturilor; prin urmare:

$$\frac{x}{x+h}=\frac{l}{L}, \quad x=\frac{hl}{L-l}=\frac{l\sqrt{Ll}}{L-l}. \tag{5.10}$$

Se deduce $x+h=OF=\dfrac{L\sqrt{Ll}}{L-l}$ și deci volumul cerut este

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{L^3\sqrt{Ll}}{L-l}.$$

c) Volumul trunchiului de piramidă este

$$V=\frac{1}{3}h(S+s+\sqrt{Ss})=\frac{1}{3}\sqrt{Ll}(L^2+l^2+Ll).$$

Aria totală se găsește imediat:

$$S_t=\frac{4(L+l)\cdot MM'}{2}+L^2+l^2=(L+l)^2+L^2+l^2=2(L^2+l^2+Ll)$$

Cîtul cerut va fi

$$\frac{V}{S_t}=\frac{\sqrt{Ll}}{6}.$$

d) Din datele problemei rezultă

$$L^2+l^2+Ll=756 \text{ și } h^2=Ll=144.$$

Adunînd cele două ecuații, se găsește

$(L+l)^2=900 \Rightarrow L+l=30$ (soluția negativă se elimină).

Sîntem conduși la sistemul

$$L+l=30, \; Ll=144$$

și, deoarece, $L>l$, singura soluție care convine este

$$L=24, \; l=6.$$

Problema 11. *Într-un trunchi de piramidă se face o secțiune cu un plan paralel cu bazele, la egală distanță de ele. Să se calculeze aria secțiunii în funcție de ariile bazelor.*

Rezolvare. Numărul de laturi ale poligoanelor de baze nu are nici o importanță, așa că putem considera că bazele sînt patrulatere. Fie deci $ABCD$ poligonul bazei mari, $A'B'C'D'$ baza mică și $A_0B_0C_0D_0$ secțiunea plană paralelă cu bazele și echidistantă de ele. Mai facem notațiile (fig. 5.9):

$L, L_1, L_2, \ldots$ laturile bazei mari;
$l, l_1, l_2, \ldots$ laturile bazei mici;
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ laturile secțiunii echidistante;
S și s — ariile bazelor și σ aria secțiunii plane.

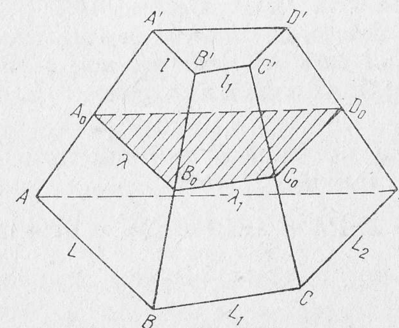


Fig. 5.9

În trapezul $ABB'A'$, A_0B_0 unește mijloacele laturilor neparalele, prin urmare:

$$\lambda = \frac{L + l}{2}.$$

Observînd apoi că cele trei poligoane, bazele și secțiunea, sînt asemenea, putem scrie rapoartele de arii:

$$\frac{\sigma}{s} = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \quad \text{și} \quad \frac{S}{s} = \left(\frac{L}{l}\right)^2.$$

Rezultă

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{s}} = \frac{\lambda}{l} = \frac{L+l}{2l} = \frac{\frac{L}{l} + 1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{s}} = \frac{\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}} + 1}{2} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{s}}{2\sqrt{s}},$$

de unde

$$\sqrt{\sigma} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{s}}{2}, \qquad (5.11)$$

adică rădăcina pătrată a ariei secțiunii echidistante este *media aritmetică a rădăcinilor pătrate ale ariilor bazelor trunchiului de piramidă.*

Problema 12.

a) *Să se cerceteze în ce condiții este posibil ca un cilindru să aibă volumul exprimat printr-un număr de unități cubice egal cu numărul de unități pătrate care dă aria totală a cilindrului.*

b) *Să se determine cilindrul de volum minim în care numărul care exprimă volumul și numărul care exprimă aria totală sînt egale.*

Rezolvare. a) Dacă R și h sînt raza bazei și înălțimea cilindrului, trebuie să avem

$$\pi R^2 h = 2\pi R h + 2\pi R^2 \Rightarrow Rh = 2h + 2R. \qquad (5.12)$$

Aceasta este relația de legătură între R și h. Se deduce

$$h = \frac{2R}{R-2} \quad \text{sau} \quad h = 2 + \frac{4}{R-2}. \qquad (5.13)$$

Deoarece elementele geometrice ale cilindrului sînt date de numere pozitive, este necesar ca

$$R > 2, \ \text{deci} \ h > 2. \qquad (5.14)$$

Dealtfel condiția asupra lui h se putea deduce direct din (5.12) calculînd pe R. Prin urmare, numai cilindrii care satisfac condițiile (5.14) pot îndeplini cerința din enunț, dacă satisfac și relația (5.12)

b) Rezultă imediat:

$$V = \pi R^2 \cdot \frac{2R}{R-2} = 2\pi \frac{R^3}{R-2}.$$

Volumul este minim odată cu funcția $f(R) = \frac{R^3}{R-2}$ care se studiază pe domeniul $(2, +\infty)$. Avem $f'(R) = \frac{2R^2(R-3)}{(R-2)^2}$; singurul factor care își schimbă semnul este $R - 3$, astfel că rezultă tabloul:

R	2	3	$+\infty$
$f'(R)$	$-$	0	$+$

Funcția (deci și volumul) prezintă un minim pentru $R = 3$, la care corespunde $h = 6$. Volumul minim este

$$V_{min} = \pi \cdot 3^2 \cdot 6u^3 = 54\pi u^3.$$

Spre verificare, aria totală a cilindrului este

$$S_t = (2\pi \cdot 3 \cdot 6 + 2\pi 3^2)u^2 = 54\pi u^2.$$

Problema 13. *Un corp este alcătuit din n cilindri suprapuși, avînd aceeași axă de rotație și înălțimile egale. Fiecare cilindru are raza mai mică cu aceeași cantitate x, decît cel precedent. Se cere:*

a) *volumul corpului;*

b) *pentru n dat și raza R a primului cilindru dată, să se demonstreze că nu se poate determina un x, astfel încît corpul definit la primul punct să aibă un volum minim.*

Rezolvare. Primul cilindru are raza R, al doilea $R - x$, al treilea $R - 2x$, ..., al n-lea $R - (n - 1)x$, care trebuie să fie pozitivă, deci $R - (n - 1)x > 0$ sau

$$x < \frac{R}{n-1}. \qquad (5.15)$$

a) Volumul corpului este suma volumelor cilindrilor, adică

$$V = \pi h\{R^2 + (R - x)^2 + (R - 2x)^2 + \ldots + [R - (n - 1)x]^2\} =$$
$$= \pi h\{nR^2 - 2Rx[1+2+\ldots+(n-1)] + x^2[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]\} =$$
$$= \pi h\left[nR^2 - n(n - 1)Rx + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}x^2\right]$$

sau

$$V = \pi h n\left[R^2 - (n - 1)Rx + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}x^2\right]. \qquad (5.16)$$

Acesta este volumul cerut, dacă (5.15) este îndeplinită.

b) Variația volumului depinde numai de expresia din paranteză, care este un trinom de gradul al doilea. Deoarece coeficientul lui x^2 este pozitiv, trinomul considerat ca funcție abstractă, adică nelegat de problema dată, are un minim pentru

$$x_0 = \frac{(n-1)R \cdot 3}{(n-1)(2n-1)} = \frac{3R}{2n-1}.$$

Problema de geometrie limitează domeniul lui x, anume $x \in \left(0, \frac{R}{n-1}\right)$, deci pentru ca trinomul să aibă minim ar trebui ca

$$\frac{3R}{2n-1} < \frac{R}{n-1} \Rightarrow n < 2, \text{ adică } n = 1.$$

Rezultă că pentru un n dat volumul nu trece printr-un minim. Ceva mai mult, deoarece $\frac{R}{n-1} < \frac{3R}{2n-1}$ $(n > 2)$, rezultă că intervalul impus lui x de problemă se află pe ramura descendentă a parabolei, cu alte cuvinte cînd x crește pe intervalul $\left(0, \frac{R}{n-1}\right)$, volumul descrește, ceea ce este conform cu realitatea geometrică.

Problema 14. *Pe o masă orizontală (H) se așază două conuri: unul cu baza, de arie S, așezată pe masă, al doilea avînd vîrful O' situat pe masă, iar baza, de arie S', paralelă cu (H). La ce distanță de (H) trebuie să se ducă un plan $(H') \parallel (H)$ care să determine în cele două conuri secțiuni echivalente?*

Rezolvare. În primul rînd trebuie observat că cele două conuri pot avea baze oarecare, nu neapărat circulare. Să notăm cu h și h' înălțimile OA și $O'A'$ ale celor două conuri, cu σ aria secțiunii din fiecare con $(\sigma = \sigma')$ și cu x distanța dintre planele (H) și (H'). Scriind că raportul dintre ariile secțiunilor și bazele conurilor este egal cu pătratul raportului înălțimilor dintre conurile mici și cele mari, avem (fig. 5.10):

$$\frac{\sigma}{S} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2, \quad \frac{\sigma}{S'} = \left(\frac{x}{h'}\right)^2,$$

de unde se deduce

$$\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{S}} = \frac{h-x}{h}, \quad \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{S'}} = \frac{x}{h'},$$

iar prin împărțire

$$\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h-x}{x} \Rightarrow x = \frac{hh'\sqrt{S}}{h\sqrt{S'} + h'\sqrt{S}}.$$

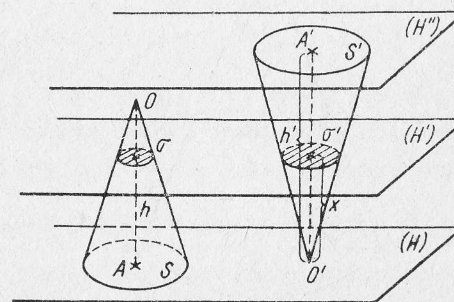


Fig. 5.10

Relația care dă pe x se poate scrie și sub forma mai simplă:

$$\frac{\sqrt{S}}{x}=\frac{\sqrt{S}}{h}+\frac{\sqrt{S'}}{h'}. \qquad (5.17)$$

Problema 15. *Generatoarea și axa unui con de rotație fac unghiul α. Se taie acest con cu două plane P și Q perpendiculare pe axa lui și avînd între ele distanța d. Să se găsească distanța de la vîrful conului la planul cel mai apropiat, pentru cazul cînd în trunchiul de con determinat de cele două secțiuni, suma ariilor cercurilor de bază este egală cu aria laterală.*

(Suplim. Gazeta Matematică, 1937, anul III, pag. 186)

Rezolvare. Considerăm planul P cel mai apropiat de vîrful V al conului și notăm cu x distanța de la vîrful V la planul P, apoi cu EF, GH diametrele cercurilor de secțiune cu planele P și Q, ale căror centre sînt O' și O'' (fig. 5.11). Relația impusă de enunț este

$$\pi\cdot O'E^2+\pi\cdot O''G^2=\pi\cdot GE(O'E+O''G).$$

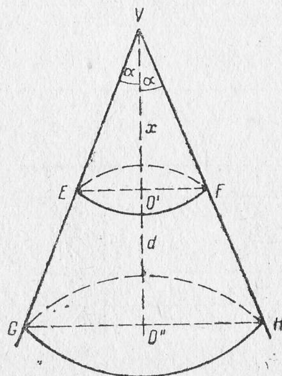


Fig. 5.11

Însă $O'E=x\operatorname{tg}\alpha$, $O''G=(x+d)\operatorname{tg}\alpha$, $GE=\frac{d}{\cos\alpha}$. Împărțind cu π relația precedentă și înlocuind, găsim

$$\sin\alpha\,[(2x^2+2dx+d^2)\sin\alpha-d(2x+d)]=0$$

sau, deoarece $\sin\alpha\neq 0$, rămîne ecuația

$$(2\sin\alpha)x^2-2dx(1-2\sin\alpha)-d^2(1-\sin\alpha)=0$$

care, rezolvată, ne conduce la soluțiile

$$x_1=d\frac{1-\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{d}{2}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-1\right)=\frac{d}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}-1\right),$$

$$x_2=d\frac{1-\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{d}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right).$$

Trebuie însă observat că $\alpha<90°\Rightarrow\frac{\alpha}{2}<45°\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<1$; deci x_2 nu poate fi luat în considerare. Rămîne singura soluție

$$x=\frac{d}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}-1\right).$$

Distanța pînă la planul Q este evident

$$x+d=\frac{d}{2}\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+1\right).$$

Problema 16. *Se sapă o groapă în formă de con circular drept, cu vîrful în jos, de rază R și adîncime h. Pămîntul scos se așază în jurul gropii, în formă inelară, avînd secțiunea un triunghi isoscel cu baza 2a și înălțimea i.*

a) *Să se stabilească relația ce există între R, a, h și i. (Nu se va socoti afînarea pămîntului după săpătură.)*

b) *Punînd $\frac{h}{i}=k$, să se găsească mulțimea valorilor lui k pentru care raportul $\frac{R}{a}$ este rațional și în special mulțimea valorilor pentru care $R>a$.*

(Supl. Gazeta Matematică, 1939, anul V, pag. 251)

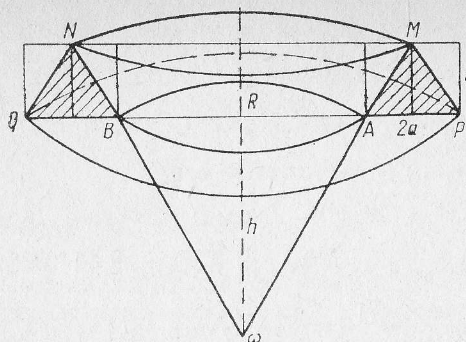


Fig. 5.12

R e z o l v a r e. *Metoda I.* 1) Chestiunea care se pune este de a calcula volumul inelului cu secțiunea triunghiulară AMP (fig. 5.12). Dăm ca o primă soluție pe aceea care ni se pare că ar fi la îndemîna oricărui cititor, anume: volumul inelului (V_i) se obține ca diferența dintre trunchiul de con $MNQP$ (V) și trunchiul de con $MNBA$ (v), deci

$$V_i = V - v = \frac{\pi i}{3}[(R+2a)^2 + (R+a)^2 + (R+2a)(R+a)] -$$

$$-\frac{\pi i}{3}[(R+a)^2 + R^2 + R(R+a)] =$$

$$= \frac{\pi i}{3}[(R+2a)^2 - R^2 + 2a(R+a)] =$$

$$= \frac{\pi i}{3} 6a(R+a) = 2\pi a i(R+a).$$

Scriind că acest volum trebuie să fie egal cu volumul conului ωAB, care este $\frac{\pi R^2 h}{3}$, rezultă relația căutată

$$6ai(R+a) = R^2 h. \qquad (5.18)$$

b) Dacă notăm $\frac{R}{a} = x$, iar din enunț avem $\frac{h}{i} = k$, atunci relația (5.18) devine

$$kx^2 - 6x - 6 = 0, \qquad (5.19)$$

de unde se deduce

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+6k}}{k}.$$

Deoarece $k > 0 \Rightarrow \sqrt{9+6k} > 3$ și cum $x > 0$, rezultă singura soluție

$$x = \frac{3+\sqrt{9+6k}}{k}. \qquad (5.20)$$

Pentru ca acest raport să fie rațional, trebuie să avem

$$9 + 6k = m^2 \Rightarrow k = \frac{m^2-9}{6} \Rightarrow m > 3,$$

la care corespunde

$$x = \frac{3+m}{m^2-9} \cdot 6 = \frac{6}{m-3}.$$

Din cele de mai înainte se vede că mulțimea valorilor lui k este dată de $\frac{m^2-9}{6}$, unde m este orice număr rațional > 3.

E x e m p l u. $m = 5$ ne dă $k = \frac{h}{i} = \frac{8}{3}$ și $x = \frac{R}{a} = 3$.

Dacă se impune și condiția $\frac{R}{a} > 1 \Rightarrow \frac{6}{m-3} > 1$, rezultă $m < 9$, deci $m \in (3, 9) \Rightarrow k \in (0, 12)$; *$m$ și k* sînt *raționali.*

Metoda a doua se referă numai la *primul punct* și arată cum se poate ușura calculul. Anume, să ducem prin A și P perpendiculare pe AP, iar prin M o paralelă la AP. Se formează dreptunghiul cu baza $AP = 2a$ și înălțimea i. Este clar că aria triunghiului isoscel AMP este jumătate din aria dreptunghiului, iar volumul inelului este jumătate din volumul *coroanei cilindrice* a cărei secțiune este dreptunghiul cu baza AP. Rezultă

$$V_i = \frac{1}{2}\pi i[(R+2a)^2 - R^2] = 2\pi a i(R+a),$$

$$2\pi a i(R+a) = \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow 6ai(R+a) = R^2 h.$$

În rest ca la prima metodă.

Metoda a treia și cea mai simplă se bazează pe *teorema lui Guldin* (pentru cititorii mai înaintați), care spune că *volumul care ia naștere prin rotirea unui domeniu plan în jurul unei axe conținute în plan și care nu taie domeniul este egal cu aria domeniului plan* ($\mathcal{A}$) *înmulțită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al acelui domeniu.* Transpusă într-o formulă, dacă d este distanța de la centrul de greutate la axa de rotație, atunci

$$V = 2\pi d \cdot \mathcal{A}. \qquad (5.21)$$

În cazul nostru centrul de greutate al triunghiului AMP care se rotește în jurul conului, se află pe înălțimea lui, deci $d = R + a$, iar $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot i = ai$. Rezultă direct

$$V_i = 2\pi ai(R + a).$$

Problema 17. *Un trunchi de con este circumscris unei sfere.*

a) *Să se arate că raportul ariilor acestor corpuri este egal cu raportul volumelor lor. (Pentru trunchiul de con se va socoti aria totală.)*

b) *Între ce limite poate varia acest raport?*

(Supl. Gazeta Matematică, anul II, 1935, pag. 21)

R e z o l v a r e. a) Fie g generatoarea trunchiului de con, R și r razele bazelor, ρ raza sferei, S_1 și S_2 ariile celor două corpuri, V_1 și V_2 volumele lor. Dacă facem o secțiune plană prin centrul O al sferei, obținem trapezul $ABCD$ circumscris unui cerc mare al sferei, punctele de tangență fiind $E \in AB$, $F \in BC$, G și H (fig. 5.13). Rezultă imediat:

$$g = BC = BE + CG = R + r. \qquad (5.22)$$

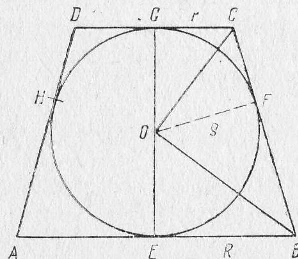


Fig. 5.13

Apoi triunghiul OBC este dreptunghic în O, deoarece OB și OC sînt bisectoarele a două unghiuri suplimentare, deci $OB \perp OC$. Raza OF fiind înălțime, se poate scrie

$$\rho^2 = OF^2 = FB \cdot FC = Rr. \qquad (5.23)$$

Cu aceste relații avem

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi g(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2}{4\pi\rho^2} = \frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr},$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 2\rho(R^2 + r^2 + Rr)}{\frac{4\pi\rho^3}{3}} = \frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr} = \frac{S_1}{S_2}.$$

b) Să punem $\frac{R^2 + r^2 + Rr}{2Rr} = m$, care se mai scrie

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2 + (1 - 2m)\frac{R}{r} + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (1 - 2m)x + 1 = 0 \quad \left(\frac{R}{r} = x\right).$$

Deoarece produsul rădăcinilor este pozitiv, rădăcinile nu pot fi decît sau ambele pozitive sau ambele negative și cum $x > 0$, trebuie ca discriminantul și suma rădăcinilor să fie pozitive:

$$4m^2 - 4m - 3 > 0 \text{ și } 2m - 1 > 0.$$

Dar $4m^2 - 4m - 3 = 0$ are rădăcinile $m_1 = -\frac{1}{2}$ și $m_2 = \frac{3}{2}$ și cum m nu poate fi negativ, din prima condiție, $m > \frac{3}{2}$, iar din a doua $m > \frac{1}{2}$, de unde rezultă că

$$m \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Problema 18.

a) *Să se arate că dacă într-un tetraedru $ABCD$ muchiile AB și BD sînt perpendiculare și de asemenea AC și CD sînt perpendiculare, piciorul înălțimii din vîrful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.*

b) *Să se exprime raportul dintre volumul conului cu vîrful A și baza cercul BCD și al sferei circumscrise lui ABCD, numai în funcție de unghiul α pe care muchia AD îl face cu planul BCD.*

(Olimpiada matematică, 1954)

R e z o l v a r e. a) Deoarece $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90°$, punctele B, D se află pe sfera cu diametrul AD (fig. 5.14); aceasta este intersectată de planul BCD după un cerc (Γ). Dacă E este piciorul înălțimii din A, atunci $\sphericalangle AED = 90°$, deci E aparține sferei cu diametrul AD, de centru Q, dar se află în planul BCD, deci $E \in (O) \cap$ pl. (BCD), adică $E \in (\Gamma)$.

b) Proiecția muchiei AD, diametrul sferei (O), pe planul (BCD) este segmentul DE, diametrul cercului (Γ), deci proiecția O' a centrului O al sferei este mijlocul lui DE. Rezultă imediat $OO' = \frac{1}{2} AE = \frac{h}{2}$, $O'E = r$, $OD = R$ (raza sferei circumscrise tetraedrului $ABCD$), iar $\sphericalangle ADE = \alpha$, unghiul făcut de muchia AD cu planul BCD. Se deduce

$$r = O'D = OD \cos \alpha = R \cos \alpha; \quad AE = h = 2R \sin \alpha,$$

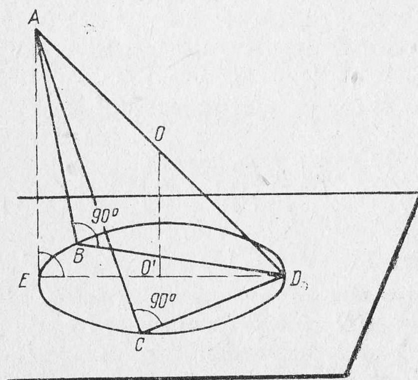


Fig. 5.14

prin urmare volumul sferei (O) și al conului circumscris tetraedrului $ABCD$ sînt

$$V_s = \frac{4\pi R^3}{3}, \quad V_c = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{2\pi}{3} R^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

Rezultă

$$\frac{V_c}{V_s} = \frac{\sin \alpha \cos^2 \alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha \cos \alpha}{4}.$$

Problema 19. *Pe o masă orizontală sînt așezate trei sfere de raze diferite. Un plan orizontal H determină în cele trei sfere secțiunile (S_1), (S_2), (S_3) de arii S_1, S_2, S_3. Să se determine poziția planului H astfel ca suma*

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

să fie maximă sau minimă, precizîndu-se ce fel de extrem este. Generalizare.

R e z o l v a r e. Fie R_1, R_2, R_3 razele sferelor și r_1, r_2, r_3 razele cercurilor de secțiune cu planul H dus la distanța x față de masa orizontală H_0. Considerăm sfera (O_1) care se sprijină în A pe masă, diametrul $AA' = 2R$, și diametrul EF al cercului de secțiune cu centrul O_1'. În triunghiul AEA', EO_1' este înălțime, deci (fig. 5.15)

$$EO_1'^2 = AO_1' \cdot O_1'A' \Rightarrow r_1^2 = x(2R_1 - x).$$

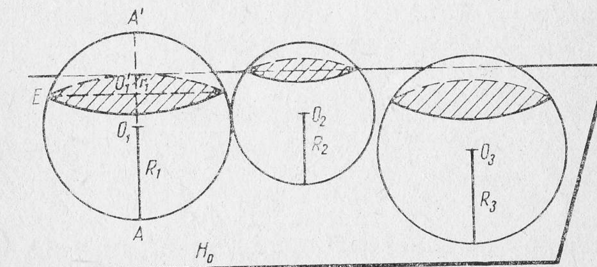


Fig. 5.15

În mod asemănător

$$r_2^2 = x(2R_2 - x),\ r_3^2 = x(2R_3 - x).$$

Cu acestea suma ariilor din enunț devine

$$S = \pi[2(R_1 + R_2 + R_3)x - 3x^2], \tag{5.24}$$

adică un trinom (incomplet) de gradul al doilea, în care coeficientul lui x^2 este negativ, deci funcția are un maxim pentru

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}. \tag{5.25}$$

Însă R_1, R_2, R_3 reprezintă distanțele centrelor sferelor față de masa H_0, iar $\frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}$ reprezintă distanța față de H_0 a centrului de greutate al triunghiului $O_1O_2O_3$. Prin urmare, planul de secțiune H pentru care suma ariilor secțiunilor făcute în cele trei sfere este maximă *trebuie dus prin centrul* de greutate al triunghiului format de centrele celor trei sfere.

Generalizarea este imediată. Dacă se consideră n sfere așezate pe o masă orizontală H_0 și se duce un plan $H \parallel H_0$ la distanța x de H_0, suma ariilor secțiunilor făcute în sfere este

$$S_n = \pi\left[2\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)x - nx^2\right] \tag{5.26}$$

care are un maxim pentru $x_0 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)$, care reprezintă distanța de la centrul de greutate al punctelor de mase egale $O_1, O_2, \ldots, O_n$ la planul orizontal H_0.

Maximul sumei S este

$$S_{max} = \pi\frac{(R_1 + R_2 + R_3)^2}{3},$$

iar în cazul general

$$(S_n)_{max} = \frac{\pi}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)^2.$$

Acestea se găsesc înlocuind pe x_0 în (5.24), respectiv (5.26).

Problema 20. *O sferă de centru O este tăiată de două plane paralele P, Q situate la distanța d unul de altul. Să se găsească distanța de la centrul sferei la planul P, așa fel încît aria zonei sferice determinate de cele două plane să fie egală cu suma ariilor secțiunilor plane. Între ce limite poate varia distanța d?*

Rezolvare. Notăm cu R raza sferei, cu x distanța de la centrul O la planul P și cu r_1, r_2 razele cercurilor de secțiune cu cele două plane. Potrivit enunțului trebuie să avem

$$2\pi Rd = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \Rightarrow 2Rd = r_1^2 + r_2^2.$$

Însă

$$r_1^2 = R^2 - x^2;\ r_2^2 = R^2 - (d - x)^2 = R^2 - x^2 + 2dx - d^2. \tag{5.27}$$

De fapt dacă planele P și Q sînt de aceeași parte a centrului O, atunci distanța la planul Q este $x - d$, dar aceasta nu modifică relația a doua din (5.27), deoarece $(x - d)^2 = (d - x)^2$. Înlocuind pe r_1^2 și r_2^2 se obține ecuația

$$2x^2 - 2dx + d^2 + 2Rd - 2R^2 = 0$$

care dă

$$x_{1,2} = \frac{d \pm \sqrt{-d^2 - 4Rd + 4R^2}}{2}.$$

Ca problema să fie posibilă trebuie ca

$$-d^2 - 4Rd + 4R^2 > 0. \tag{5.28}$$

Rădăcinile trinomului fiind $d_{1,2} = 2R(-1 \pm \sqrt{2})$ și ținînd seama că $d > 0$, din inecuația (5.28) rezultă

$$0 < d < 2R(\sqrt{2} - 1)$$

sau cu aproximație

$$d < 0{,}83\ R.$$

Problema 21. *Pe o masă orizontală (H) se așază o sferă de rază R și un con de rotație cu raza bazei R_1 și înălțimea cît diametrul sferei. La ce distanță de planul (H) trebuie să ducem un plan (H') paralel cu acesta, astfel ca segmentul sferic și trunchiul de con cuprinse între cele două plane paralele să aibă volumele egale?*

R e z o l v a r e. Notăm cu z distanța dintre planele (H') și (H) și cu r_1 raza secțiunii în con. Volumul V_s al segmentului sferic și volumul V_t al trunchiului de con sînt date de

$$V_s = \frac{\pi z^2}{3}(3R - z), \quad V_t = \frac{\pi z}{3}(R_1^2 + r_1^2 + R_1 r_1). \quad (5.29)$$

Egalînd cele două volume, conform enunțului, apare întîi soluția $z = 0$, ceea ce este evident, dar nu răspunde problemei. Este un caz limită, deoarece nu avem efectiv nici segment sferic (se reduce la un punct), nici trunchi de con (se reduce la cercul de bază a conului). Rămîne ecuația

$$z(3R - z) = R_1^2 + r_1^2 + R_1 r_1. \quad (5.30)$$

Notînd cu A_1B_1 și O_1 diametrul și centrul cercului de bază a conului, cu $A_1'B_1'$ și O_1' elementele corespunzătoare ale secțiunii plane în con și cu ω vîrful conului, avem (fig. 5.16)

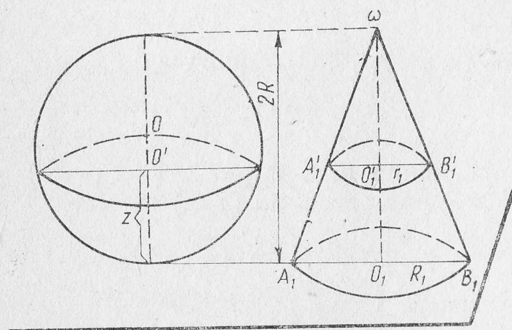


Fig. 5.16

$\triangle \omega O_1'A_1' \sim \triangle \omega O_1 A_1$ din care se deduce (ținînd seama că înălțimea conului este $2R$)

$$r_1 = \frac{R_1}{2R}(2R - z).$$

Introducem expresia lui r_1 în (5.30) și ordonăm după puterile lui z; sîntem conduși la ecuația de gradul al doilea

$$(4R^2 + R_1^2)z^2 - 6R(2R^2 + R_1^2)z + 12R^2R_1^2 = 0, \quad (5.31)$$

din care se vede imediat că suma și produsul rădăcinilor sînt pozitive, deci dacă rădăcinile ei sînt *reale*, atunci sînt *ambele pozitive*. Discriminantul Δ, făcînd abstracție de factorul 4 (luăm pe jumătate coeficientul lui z), se poate descompune în factori după cum urmează:

$$\Delta = 9R^2(2R^2 + R_1^2)^2 - 12R^2R_1^2(4R^2 + R_1^2) =$$
$$= 3R^2(12R^4 - 4R^2R_1^2 - R_1^4) = 3R^2(6R^2 + R_1^2)(2R^2 - R_1^2).$$

Primii doi factori fiind pozitivi, semnul este dat numai de ultimul factor, de unde se deduce condiția de posibilitate a problemei

$$0 < R_1 \leqslant R\sqrt{2}. \quad (5.32)$$

Dacă $R_1 = R\sqrt{2}$, ecuația (5.31) are rădăcina dublă $z = -\frac{b}{2a} = 2R$, ceea ce înseamnă că *sfera* și *conul întreg* au același volum, lucru care se verifică cu ușurință, dar iarăși ne găsim într-un caz limită. Prin urmare, pentru a ne încadra strict în enunțul problemei, trebuie ca

$$R_1 < R\sqrt{2}, \quad (5.33)$$

adică *raza conului să fie mai mică decît latura pătratului înscris într-un cerc mare al sferei.*

Rămîne să lămurim cîte soluții are problema. Deoarece ambele rădăcini ale ecuației (5.31) sînt pozitive, notăm $f(z)$ prima parte a ecuației (5.31) și facem tabloul

z	0	$2R$	$+\infty$
$f(z)$	$12R^2R_1^2 > 0$	$4R^2(R_1^2 - 2R^2) < 0$	$+$

Rezultă că o rădăcină $x_1 \in (0, 2R)$, iar a doua $x_2 > 2R$. Prin urmare, problema este posibilă pentru $R_1 < R\sqrt{2}$, admite o singură soluție și anume aceea care corespunde la cea mai mică dintre rădăcinile ecuației (5.31). A doua rădăcină nu are sens în condițiile problemei.

Problema 22. *Se dau două sfere (O_1) și (O_2) tangente exterior în punctul T. Fie A și B punctele de contact ale celor două sfere cu una din generatoarele conului tangent celor două sfere. Prin A și B se duc două drepte paralele AM și BN, unde $M \in (O_1)$ și $N \in (O_2)$.*

a) *Să se demonstreze că $\sphericalangle MTN$ este drept.*

b) *Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN, precizînd poziția lui, cînd AM și BN își schimbă pozițiile, rămînînd mereu paralele.*

R e z o l v a r e. a) Vîrful ω al conului tangentelor la sfere se află pe linia centrelor O_1O_2, prin urmare O_1, O_2, A, B sînt în același plan de unde rezultă $O_1A \parallel O_2B$. Apoi $AM \parallel BN$ (enunț), astfel că pl. $(AO_1M) \parallel$ pl. (BO_2N). Triunghiurile isoscele AO_1M și BO_2N sînt deci situate în plane paralele și au cîte două laturi paralele; acestea fiind asemenea, rezultă $O_1M \parallel O_2N$ (fig. 5.17).

Situîndu-ne acum în planul MNO_2O_1, avem evident $\sphericalangle MO_1T + \sphericalangle TO_2N = 180°$, apoi din triunghiurile isoscele

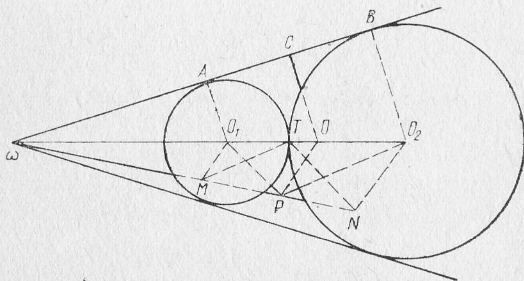


Fig. 5.17

MO_1T și NO_2T, obținem $\sphericalangle O_1TM = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle MO_1T)$ și $\sphericalangle O_2TN = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle NO_2T)$, prin urmare

$$\sphericalangle O_1TM + \sphericalangle O_2TN = \frac{1}{2}[360° - (\widehat{MO_1T} + \widehat{NO_2T})] = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Rezultă imediat $\sphericalangle MTN = 90°$.

b) Triunghiul MTN fiind dreptunghic în T, se va observa că mijlocul P al ipotenuzei MN se obține ducînd perpendiculare din O_1 și O_2 pe MT și NT și avem evident $O_1P \perp O_2P$. Deci locul geometric al lui P în planul $O_1O_2\,NM$ este cercul cu diametrul O_1O_2, iar în spațiu sfera cu diametrul O_1O_2 și cu centrul O la mijlocul segmentului O_1O_2. Raza acestei sfere este $R = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, dar dacă se duce $OC \perp AB$ $(C \in AB)$, atunci avem de asemenea $OC = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$, de unde se deduce că sfera loc geometric al lui P este tangentă conului tangent celor două sfere date.

Problema 23. *Se dă un plan (P) și două puncte exterioare A și B, situate de aceeași parte a lui. Se cere:*

a) *locul geometric al punctelor de tangență cu planul (P) al sferelor care trec prin A și B sînt tangente planului (P);*

b) *locul geometric al centrelor acestor sfere.*

R e z o l v a r e. a) În primul rînd trebuie observat că orice sferă care trece prin A și B își are centrul O în planul mediator al segmentului AB. Din această mulțime va trebui să alegem pe cele care sînt tangente planului (P). Pentru aceasta fie (fig. 5.18) $C \equiv AB \cap (P)$ și M punctul de contact al uneia din sfere cu planul (P). Scriind puterea punctului C față de sferă, avem

$$CM^2 = CA \cdot CB = \text{const},$$

de unde rezultă că M descrie în planul (P) un cerc (C) cu centrul C și cu raza $r = \sqrt{CA \cdot CB}$.

Fig. 5.18

b) Presupunem că am fixat pe cercul (C) un punct M şi vrem să determinăm sfera corespunzătoare. Centrul ei se află evident pe perpendiculara (Δ) în M pe planul (P), dar se află şi în planul mediator (Q) al segmentului AB, prin urmare $O \equiv (\Delta) \cap (Q)$. Cînd M se mişcă pe cercul (C), perpendiculara (Δ) generează o suprafaţă cilindrică (Γ). Centrele sferelor care trec prin A şi B şi sînt tangente planului (P) trebuie să se afle pe această suprafaţă (Γ), dar şi în planul mediator al lui AB, adică pe *curba de intersecţie* (γ) dintre cilindrul (Γ) şi planul mediator (Q). Această curbă este locul centrelor sferei.

Discuţie. a) În general planul mediator taie oblic generatoarele cilindrului şi curba (γ) este o elipsă.

b) Dacă $AB \perp (P)$, atunci $C \equiv AB \cap (P)$, iar $r = \sqrt{CA \cdot CB}$ ca mai înainte. Cilindrul descris de (Δ) are dreapta AB ca axă de rotaţie, iar planul mediator $(Q) \parallel (P)$ taie acest cilindru după un cerc (γ).

c) Dacă $AB \parallel (P)$, punctul C este aruncat la infinit. Fie $d \equiv (Q) \cap (P)$ şi $M \in d \Rightarrow \Delta \in (Q)$. Condiţia ca M să fie punctul de tangenţă al sferei (O) cu planul (P) este ca triunghiul AOM să fie isoscel $(OM = OA)$ (în care caz evident că $OM = OB$), unde $O \in (\Delta)$. Dreapta d este locul geometric al punctelor de tangenţă ale sferelor cu planul (P), iar mulţimea punctelor din planul (Q) care satisfac condiţiile de mai sus constituie locul geometric al centrelor sferelor.

1. Se dau în spaţiu un cerc (O), o dreaptă (Δ) nesituată în planul (P) al cercului şi un punct A exterior planului (P) şi dreptei (Δ). Să se ducă prin A o dreaptă (D) care să se sprijine pe (Δ) şi pe cercul (O). Discuţie.

2. Prin punctele A, B, C, D situate oricum în spaţiu se duc drepte paralele, care intersectează un plan (P) respectiv în A', B', C', D'. Să se determine direcţia dreptelor paralele astfel ca unul din cele patru puncte de intersecţie cu planul (P) să fie centrul de greutate al triunghiului format de celelalte trei.

3. Două piramide, cu poligoanele de bază aşezate într-un plan orizontal (H), au ariile bazelor S şi S' şi înălţimile corespunzătoare h şi h'. Să se determine distanţa x la care trebuie dus un plan $(H') \parallel (H)$ astfel ca să determine secţiuni echivalente în cele două piramide. Să se arate că x satisface relaţia

$$\frac{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}{x} = \frac{\sqrt{S}}{h} - \frac{\sqrt{S'}}{h'}.$$

4. Se dă piramida triunghiulară regulată $VABC$, cu vîrful V, în care se notează latura bazei cu a şi muchia cu b. Se consideră punctele $D \in VA$ astfel ca $DA = \frac{1}{4}VA$, E mijlocul lui VB şi $F \in VC$ astfel ca $VE = \lambda VC$.

a) Să se determine λ ca funcţie de a şi b astfel ca triunghiul DEF să fie dreptunghic în E.

b) Să se determine λ astfel ca volumul piramidei $VDEF$ să fie un sfert din volumul piramidei date $VABC$.

5. Pe muchiile AB, AC, AD ale tetraedrului regulat $ABCD$ se consideră punctele B', C', D' astfel că $AB' = \frac{1}{2}AB$, $AC' = \frac{3}{4}AC$, $AD' = \frac{1}{4}AD$. Notînd cu a muchia tetraedrului,

se cere să se calculeze:

a) aria secțiunii plane $B'C'D'$;

b) unghiul pe care îl face planul $(B'C'D')$ cu planul (BCD);

c) volumul tetraedrului $AB'C'D'$.

6. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC ale cărui catete sînt $AB = c$ și $AC = b$, iar înălțimea este AD.

a) Să se calculeze în funcție de b și c segmentele AD, BD, CD, precum și proiecțiile lor pe catetele AB, AC.

b) Se rotește triunghiul ADC în jurul lui AC, iar triunghiul ADB în jurul lui AB. Să se calculeze volumele corpurilor obținute și raportul lor.

c) Să se calculeze ariile celor două corpuri obținute și raportul acestor arii.

(Institutul Politehnic București, examen de admitere 1964)

7. Tangentele duse dintr-un punct P la o sferă de centru O formează un con care are ca bază cercul (Γ) al punctelor de contact. Să se determine unghiul α făcut de raza sferei, de contact. Să se determine unghiul α făcut de raza sferei, care merge la unul din punctele de contact, cu dreapta OP, astfel încît aria calotei exterioare conului să fie medie geometrică între aria laterală a conului și aria bazei lui.

(Supl. Gazeta Matematică, 1942, vol. VIII, pag. 152)

8. Un corp geometric este format dintr-un trunchi de con terminat cu semisfere avînd aceleași raze R și r ca și bazele respective. Volumul acestui corp geometric este dat de

$$V = \frac{4\pi}{3}(R + r)\ (R^2 + r^2).$$

a) Să se calculeze înălțimea trunchiului de con.

b) Să se calculeze raza secțiunii (paralelă cu bazele trunchiului de con) care împarte solidul în două părți de egal volum.

(Supl. Gazeta Matematică, 1940, vol. VI, pag. 227)

9. Pe o dreaptă (Δ) se ia segmentul $AB = 2R$ și se construiește de o parte a dreptei semicercul AMB, cu centrul O și raza R. Pe aceeași dreaptă se consideră, de o parte și de alta a lui O, punctele P și Q astfel ca $OP = OQ = 2R$ și se duc tangentele PE și QF la semicerc $(E, F \in AMB)$. Se cere:

a) aria suprafeței obținute prin rotirea conturului $PEMFQ$ în jurul dreptei (Δ);

b) volumul ce ia naștere prin rotirea în jurul dreptei (Δ) a suprafeței cuprinse între conturul precedent și dreapta (Δ). Generalizare.

10. Într-o sferă de rază R se dă o gaură în formă de cilindru cu raza a avînd ca ax un diametru al sferei. Materialul rezultat prin performare se înlătură. Să se afle volumul corpului rămas din sferă (în formă de mărgea), în funcție de R și a.

RĂSPUNSURI LA PROBLEMELE PROPUSE

1

1. a) Triunghiurile ADE, ADF fiind isoscele, rezultă că $\sphericalangle EAF = 2\widehat{A}$, deci pentru ca E, A, F să fie coliniare trebuie ca $\widehat{A} = 90°$.

b) $BF + FE + EC = BC + 2AD$, deci minimul conturului $BFEC$ are loc odată cu minimul lui AD, adică min $(BFEC) = BC + 2h_a$ (h_a fiind înălțimea din A).

c) $\sphericalangle FBC + \sphericalangle BCE = 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 180°$, deci $BF \parallel CE$. Min $|CE - BF| = \min |CD - BD|$, care are loc atunci cînd $BD = DC$, adică AD este mediană.

d) Avem din trapezul $BFEC$:

$$\frac{GF}{GC} = \frac{BF}{CE}, \quad \text{dar} \quad \frac{BF}{CE} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{FG}{GC} = \frac{BD}{DC}, \quad \text{deci } GD \parallel BF \parallel CE.$$

2. a) Presupunînd problema rezolvată, avem $\dfrac{CF}{CE} = \dfrac{DF}{DA}$, deci se ia $DF = 2DA$. Rezultă E.

b) În triunghiul FAA', FE este mediană iar C centrul de greutate, deci AC este mediană.

3. În trapezele $AMND$ și $BMNC$ avem $EF = \dfrac{DN - AM}{2}$ și $GH = \dfrac{MB - NC}{2}$. Din $AM + MB = CN + ND$ rezultă $MB - NC = DN - AM$ (fig. 1).

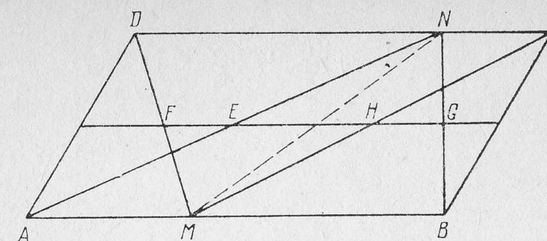


Fig. 1

4. Să observăm de la început că $3\alpha < 90° \Rightarrow \alpha < 30°$. Putem calcula unghiurile din N și P ale patrulaterului $MNPQ$, anume

$$\sphericalangle MNP = 180° - 2\alpha - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$$

și $\sphericalangle NPQ = 180° - 3\alpha - (90° - 2\alpha) = 90° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle MNP = \sphericalangle NPQ$, astfel că $MNPQ$ nu poate fi trapez isoscel decît dacă $MN = PQ$ (fig. 2). Un caz evident este acela în care $\Delta MBN = \Delta PDQ$, de unde $NB = PD \Rightarrow CN = CP$, deci $2\alpha = 45°$ și $\alpha = 22°30'$. Axa de simetrie a trapezului isoscel este diagonala CA. Dar două triunghiuri dreptunghice pot avea ipotenuzele egale, fără ca ele să fie egale. Pentru a studia cazul general vom recurge la trigonometrie. Notăm latura pătratului cu a și $MB = l$. Dăm calculul strict necesar:

$$MN = \frac{l}{\cos \alpha}; \; CN = a - l \operatorname{tg} \alpha;$$

$$PC = (a - l \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha; \; PD = a - (a - l \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Rezultă condiția

$$\frac{a(1 - \operatorname{tg} 2\alpha) + l \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{l}{\cos \alpha},$$

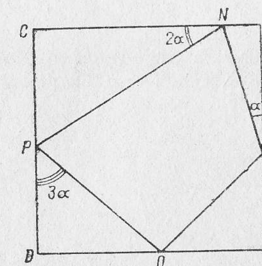


Fig. 2

care duce la

$$a(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) + 2\, l \sin^2 \alpha = l \cos 2\alpha\, (4\cos^2 \alpha - 3),$$

$$a(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = l[\cos 2\alpha\, (4\cos^2 \alpha - 3) - 2\sin^2 \alpha] =$$

$$= l[2\cos 2\alpha\,(2\cos^2 \alpha - 1) - 1] = l \cos 4\alpha.$$

Ecuația se mai poate scrie

$$a(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) = l(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)$$

sau

$$(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)\left(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{a}{l}\right) = 0$$

care se desface în

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 22°30',$$

independent de a și l (este cazul studiat direct geometric) și

$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{a}{l} \Rightarrow \sin 2\alpha + \operatorname{tg} 45° \cos 2\alpha = \frac{a}{l},$$

care dă

$$\sin(2\alpha + 45°) = \frac{a}{l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a}{l} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow l > a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

deci $\frac{a\sqrt{2}}{2} < l < a$. Dacă punem $\frac{a\sqrt{2}}{2l} = \sin\theta$, atunci

$$2\alpha + 45° = \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\theta - 45°}{2},$$

dar $\alpha < 30°$, deci $\theta < 105°$. În acest caz α depinde de θ, deci de a și l.

Ecuația $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{a}{l}$ se mai poate rezolva punînd $\operatorname{tg} \alpha = t$.

5. a) Se știe că o mediană a unui triunghi este mai mică decît semisuma laturilor care pleacă din același vîrf. Demonstrația se face prin completarea paralelogramului. Prin urmare,

$$MB < \frac{BA + BC}{2}, \quad MD < \frac{DA + DC}{2},$$

de unde

$$MB + MD < \frac{AB+BC+CD+DA}{2}; \quad NA + NC < \frac{AB+BC+CD+DA}{2}.$$

Prin adunare rezultă relația din enunț.

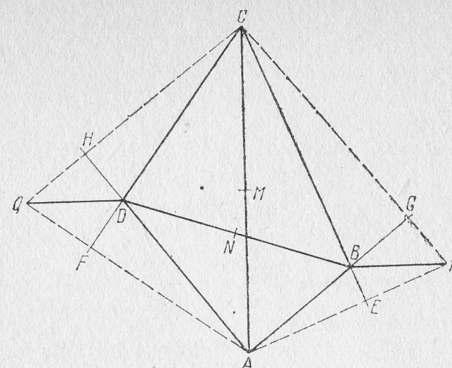


Fig. 3

b) Se observă că în triunghiurile ACP și ACQ (fig. 3) punctele B și D sînt intersecțiile a cîte două înălțimi, deci BP și DQ sînt înălțimi. Rezultă $PB \perp AC$, $QD \perp AC$. Pentru ca PQ să se confunde cu BD, trebuie ca $BD \perp AC$; patrulaterul $ABCD$ trebuie să fie *ortodiagonal*, în care caz proprietatea este valabilă și dacă se duc perpendiculare din B și D pe laturile opuse.

6. a) Potrivit construcției $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$ sau $\frac{d}{a} = \frac{DE}{b} = \frac{AE}{\delta}$ (fig. 4). Se deduce (1) $DE = \frac{bd}{a}$. Egalitățile $\frac{d}{a} = \frac{AE}{\delta}$ și $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAE$ arată că $\Delta ABD \sim \Delta ACE$.

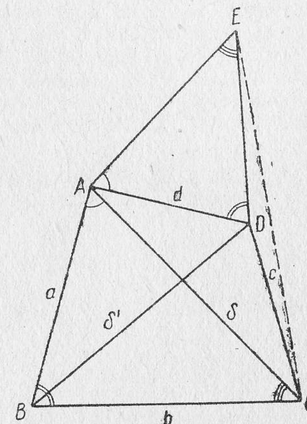


Fig. 4

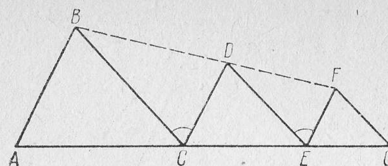


Fig. 5

b) Din asemănare se găsește (2) $CE = \dfrac{\delta\delta'}{a}$. Din egalitatea evidentă $CE < CD + DE$, ținînd seama de (1) și (2), rezultă $\delta\delta' < ac + bd$. Egalitatea are loc numai dacă C, D, E sînt coliniare, adică în patrulaterul dat $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$ ($ABCD$ fiind inscriptibil).

7. Triunghiurile ABC, CDE, EFG fiind asemenea, avem (fig. 5) $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BC}{DE}$ și $\dfrac{CD}{EF} = \dfrac{DE}{FG}$. Însă pentru ca B, D, F să fie coliniare trebuie ca $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EDF \Rightarrow \Delta BCD \sim \Delta DEF$, deci $\dfrac{BC}{DE} = \dfrac{CD}{EF}$. Deoarece $\dfrac{BC}{DE}$ este element comun, rezultă $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{CD}{EF}$, de unde $CD^2 = AB \cdot EF$. Toate elementele triunghiului mijlociu sînt medii geometrice între elementele omoloage din triunghiurile extreme. Reciproca se demonstrează cu ușurință.

8. a) $GBA'C$ este înscris în cercul cu diametrul GA'. Fie O_1 centrul cercului; O_1D este mediatoarea lui BC (fig. 6), deci trece prin O, centrul cercului circumscris lui ABC. La fel centrele O_2, O_3 ale cercurilor $GCB'A$, $GAC'B$ se află respectiv pe OE, OF. Perpendiculara din A' taie pe GO în G'; în triunghiul $GA'G'$ avem $O_1O \parallel A'G'$ și cum O_1 este mijlocul lui GA', O este mijlocul lui GG'. La fel se arată că perpendicularele din B' și C' trec prin G'.

b) Din cele precedente rezultă că G_1 și L sînt simetrice față de mijlocul D al laturii BC. Apoi deoarece $GG_1 \parallel A'L$ și $BG \perp BA'$, avem $\Delta BGG_1 \sim \Delta BA'L$, deci

$$\frac{BG_1}{A'L} = \frac{GG_1}{BL} \quad \text{sau} \quad \frac{BG_1}{A'L} = \frac{\frac{1}{3}h_a}{G_1C} \Rightarrow A'L = \frac{3BG_1 \cdot G_1C}{h_a}.$$

9. a) Din $\Delta OA_0A_1 \sim \Delta OA_1A_2 \sim \Delta OA_2A_3 \sim \ldots$ rezultă (fig. 7)

$$\frac{OA_2}{OA_1} = \frac{OA_1}{OA_0} \Rightarrow OA_2 = OA_1\frac{OA_1}{OA_0},$$

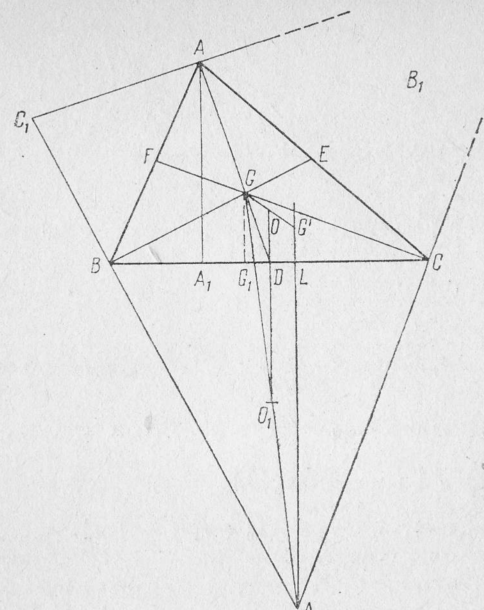


Fig. 6

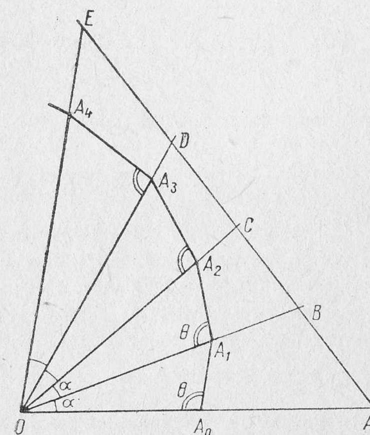


Fig. 7

apoi

$$\frac{OA_3}{OA_2} = \frac{OA_2}{OA_1} \Rightarrow OA_3 = OA_2\frac{OA_2}{OA_1} = OA_1\left(\frac{OA_1}{OA_0}\right)^2, \dots$$

Ținînd seama că $OA_1 = OA_0\frac{OA_1}{OA_0}$, se deduce

$$OA_2=OA_0\left(\frac{OA_1}{OA_0}\right)^2; \; OA_3=OA_0\left(\frac{OA_1}{OA_0}\right)^3; \; \dots ; \; OA_n=OA_0\left(\frac{OA_1}{OA_0}\right)^n,$$

deci rația $q = \frac{OA_1}{OA_0}$.

b) Dacă $\theta > \widehat{OA_1A_0}$, atunci $\frac{OA_1}{OA_0} = q > 1$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} OA_n = \infty$.

Dacă $\theta = \widehat{OA_1A_0}$, atunci $OA_0 = OA_1 = \dots = OA_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty} OA_n = OA_0 = a_0$.

Dacă $\theta < \widehat{OA_1A_0}$, $q < 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} OA_n = 0$.

c) $OA_1 = \sqrt{a_0^2 + a_1^2}, \dots, OA_n = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2}$.

d) În fiecare din triunghiurile AOC, BOD, COE, raza interioară este bisectoare, deci

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{BC}; \quad \frac{OE}{OC} = \frac{DE}{CD}.$$

Din înmulțirea lor rezultă

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DE}\cdot\frac{OE}{OA} = \frac{AB}{DE}\cdot\frac{CE}{AC},$$

deoarece OC este bisectoarea în triunghiul OAE.

10. a) Din triunghiurile înscrise în semicercuri (fig. 8), rezultă că $PMQN$ este dreptunghi.

b) $\sphericalangle PDC = \sphericalangle ABQ$ avînd laturile paralele și fiind ambele ascuțite. Rezultă imediat că $\sphericalangle PFC = \sphericalangle AEQ$ și, adăugînd unghiurile alterne interne egale din F și E, se deduce $\sphericalangle PFE = \sphericalangle FEQ$, deci $FP \parallel EQ$.

c) Dreapta EF împarte orice paralelă la bazele trapezului (mărginită de laturile neparalele) în părți egale. Pe de altă parte avem evident $\frac{FI}{IE} = \frac{FP}{EQ} = \frac{DC}{AB}$, dar fiecare diagonală a trapezului împarte segmentul EF într-un raport egal cu raportul bazelor (demonstrația este imediată), deci I este punctul (fix) de intersecție a diagonalelor. Rezultă că dreapta PQ trece prin punctul fix I.

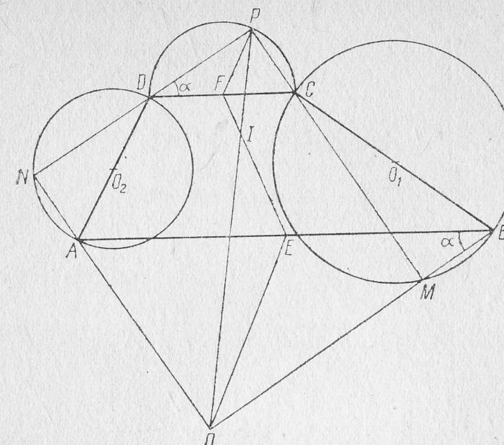


Fig. 8

d) Notăm $\sphericalangle PDC = \sphericalangle ABQ = \alpha$, apoi cu $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ unghiurile trapezului. Avem $\sphericalangle ADN = 180° - \alpha - \widehat{D} \Rightarrow \sphericalangle ANO_2 = 90° - (180° - \alpha - \widehat{D}) = \alpha + \widehat{D} - 90°$, apoi $\sphericalangle QMO_1 = 180° - \widehat{BMO_1} = 180° - (\alpha + \widehat{B})$. În patrulaterul $MKNQ$ avem $360° = (\alpha + \widehat{D} - 90°) + 90° + (180° - \alpha - \widehat{B}) + \sphericalangle MKN$, de unde $\sphericalangle MKN = (180° - \widehat{D}) + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{B} =$ const. Punctele O_1, O_2 fiind fixe și $\sphericalangle O_1KO_2 =$ const, K descrie arcul de cerc capabil de unghiul $\widehat{A} + \widehat{B}$.

2

1. a) Perpendiculara pe TT' în M taie pe OO' în mijlocul său N, punct fix. Apoi $MN = \frac{1}{2}(R + R') =$ const, deci locul lui M este cercul cu centrul N și raza $\frac{1}{2}(R + R')$. De observat că toate tangentele TT' rămîn tangente și acestui cerc (fig. 9).

b) Se duce $PQ \perp TT'$ $(Q \in OO')$. Avem $\frac{TP}{PT'} = \frac{OQ}{QO'} = k$, deci Q este fix. Paralela din O la TT' întîlnește PQ și $O'T'$ respectiv în

Fig. 9

E și F. Avem

$$\frac{EQ}{O'F} = \frac{OQ}{OO'} = \frac{k}{1+k} \Rightarrow EQ = \frac{k}{1+k}(R' - R),$$

apoi

$$PQ = PE + EQ = R + \frac{k}{1+k}(R' - R) \Rightarrow PQ = \frac{R + kR'}{1+k} = \text{const.}$$

Locul lui P este cercul cu această rază și cu centrul în Q.

2. Se poate lua unghiul α într-un sens sau altul față de AB. Presupunem $\widehat{MDB} = \alpha$ (fig. 10).

a) $\Delta MDB \sim \Delta MAB$, deoarece au $\widehat{B}$ comun și $\sphericalangle AMB = \sphericalangle MDB = \alpha$. Rezultă $\frac{DM}{AM} = \frac{BM}{AB} = \frac{DB}{MB} \Rightarrow BM^2 = BD \cdot BA = \text{const}$. Locul este cercul cu centrul B și raza $\sqrt{BD \cdot BA}$.

Fig. 10

b) Locul mijlocului lui AM este un cerc cu centrul în mijlocul lui AB și raza $\frac{1}{2}MB$, iar locul mijlocului lui BM un cerc concentric cu cel descris de M. Cititorul va studia singur cazul cînd $\sphericalangle NDA = \alpha$.

3. a) $OT \| O'T'$ și din $\Delta OMT \sim \Delta O'BT'$ se deduce $\sphericalangle OMT = \sphericalangle O'BT'$, deci $MT \| BT'$ (fig. 11). La fel $AT \| MT'$; figura $MT'PT$ este dreptunghi, adică $\sphericalangle APB = 90°$. Locul lui P este cercul de diametru AB.

b) Tangenta comună în M taie pe TT' în E. Avem $ET = EM = ET'$, deci E este mijlocul lui TT'. Dar MP este diagonala dreptunghiului, rezultă $E \in MP$, adică $PM \perp AB$. Apoi în triunghiul dreptunghic OEO', EM este înălțime, de unde rezultă $EM = \sqrt{rr'}$ și $TT' = 2\sqrt{rr'}$. Dar $\Delta PTT' \sim \Delta PAB$ ($\widehat{A} = \sphericalangle T'TM = \sphericalangle TT'P$); scriind că înălțimile sînt proporționale cu laturile, avem $\frac{d}{PM} = \frac{TT'}{AB}$ sau $d = \frac{TT'^2}{AB} = \frac{4rr'}{2(r + r')}$, de unde $\frac{2}{d} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$.

4. a) $\widehat{A'} = \sphericalangle B'A'A + \sphericalangle C'A'A = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90° - \frac{\widehat{A}}{2}$ (fig. 12).

La fel $\widehat{B'} = 90° - \frac{\widehat{B}}{2}$; $\widehat{C'} = 90° - \frac{\widehat{C}}{2}$.

b) Fie $D \equiv AA' \cap B'C'$. Avem $\sphericalangle ADB' = \frac{1}{2}$ măs.$(\widehat{AB'} + \widehat{C'B} + \widehat{BA'}) = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90° \Rightarrow AA' \perp B'C'$.

c) I este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ și A'' diametral opus lui A'; aceste puncte și mijlocul lui $B'C'$ sînt coliniare (vezi 2.4, proprietatea 1).

Fig. 11

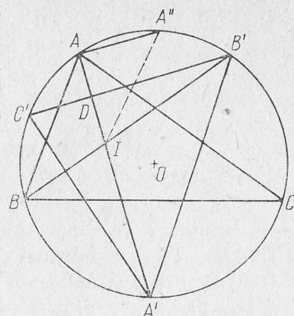


Fig. 12

5. a) Din trapezul $ABCA'$ rezultă $A'C = AB$, iar din $ABB'C$, $B'C = AB$ (fig. 13), deci $\Delta A'CB'$ este isoscel, cu baza $A'B'$.

b) Dacă DEF este triunghiul ortic, DE este antiparalelă cu AB, adică $\sphericalangle EDC = \hat{A}$ (fig. 5). Apoi $\sphericalangle(A'B', BC) = \frac{1}{2}$ măs. $(\overset{\frown}{A'C} + \overset{\frown}{BB'}) =$

$= \frac{1}{2}$ măs. $(\overset{\frown}{A'C} + \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{B'C}) = \widehat{A}$, deoarece $\overset{\frown}{A'C} = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B'C}$ din trapezele respective, deci $A'B' \parallel DE$. La fel pentru celelalte. Rezultă $\Delta A'B'C' \sim \Delta DEF$ și $\widehat{A'} = 180° - 2\widehat{A}$, $\widehat{B'} = 180° - 2\widehat{B}$, $\widehat{C'} = 180° - 2\widehat{C}$.

c) Simetricele H_2 și H_3 ale ortocentrului H față de AC și AB se află pe cercul circumscris (vezi 2.4, proprietatea 5), deci $H_2H_3 = 2EF$.

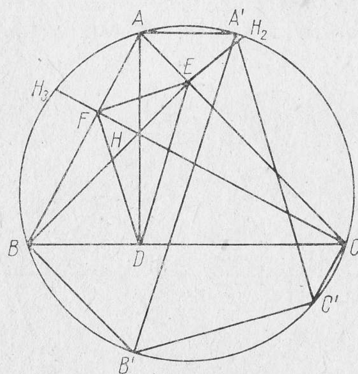


Fig. 13

Pe de altă parte

arc H_2H_3 = arc H_2A + arc $AH_3 = 2(90° - \widehat{A}) + 2(90° - \widehat{A}) = 2(180° - 2\widehat{A})$;

dar și arc $B'C' = 2(180° - 2\widehat{A})$, fiind arcul corespunzător unghiului $\widehat{A'}$. Rezultă egalitatea coardelor: $2EF = B'C' \Rightarrow \frac{EF}{B'C'} = \frac{1}{2}$, raportul de asemănare.

Metoda II. Din triunghiul AEF se calculează cu teorema sinusurilor latura $EF = R \sin 2A$. Din triunghiul $A'B'C'$ tot teorema sinusurilor ne dă $B'C' = 2R\sin A' = 2R\sin 2A$, deci raportul de asemănare este $1/2$.

Metoda III. Raportul de asemănare a celor două triunghiuri este egal cu raportul de asemănare al cercurilor circumscrise, dar cercul (DEF) sau cercul lui Euler are raza $R/2$.

6. Se folosește fig. 3. La problema 5 din cap. 1 s-a arătat că $PB \perp AC$ și $QD \perp AC \Rightarrow PB \parallel QD$. Pentru ca PQ să treacă prin mijlocul lui BD trebuie ca $PBQD$ să fie paralelogram, deci $PB = QD$. Dacă O_1 și O_2 sînt centrele cercurilor (ABC) și (CDA), distanțele lor la latura comună trebuie să fie egale și anume $d = \frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}QD$. Condițiile sînt deci ca punctele B și D să se afle pe arce de cerc simetrice față de AC și care să treacă prin A și C (O_1 și O_2 se află pe mediatoarea lui AC).

7. a) În dreptunghiurile formate în jurul punctului I avem (fig. 14): $\sphericalangle MNP = \sphericalangle MNI + \sphericalangle INP = \sphericalangle ABI + \sphericalangle DCI$, apoi $\sphericalangle MQP = \sphericalangle MQI + \sphericalangle IQP = \sphericalangle BAI + \sphericalangle CDI$. Ca patrulaterul $MNPQ$ să fie inscriptibil trebuie ca $\sphericalangle MNP + \sphericalangle MQP = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle ABI + \sphericalangle DCI + \sphericalangle BAI + \sphericalangle CDI = 180° - \sphericalangle AIB + 180° - \sphericalangle CID = 180°$. Rezultă $\sphericalangle AIB + \sphericalangle CID = 180°$ și implicit $\sphericalangle AID + \sphericalangle BIC = 180°$.

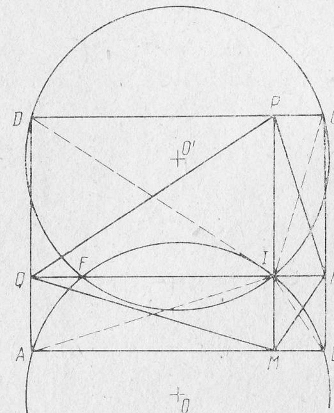


Fig. 14

b) Cercurile (O) și (O') sînt egale și au suma arcelor AIB și CID egală cu 360°, deci $\sphericalangle AIB + \sphericalangle CID = 180°$ și condiția de la a) este îndeplinită. În acest fel se poate obține o infinitate de puncte I (sau F) pentru care $MNPQ$ este inscriptibil.

8. a) Este evident că unghiurile din M, N, P, Q sînt drepte. Să notăm $\sphericalangle MAB = \alpha$, $\sphericalangle NBC = \beta$, $\sphericalangle PCD = \gamma$, $\sphericalangle QDA = \delta$ (fig. 15). Scriind că în B, C, D spre interior avem suma unghiurilor 180°, găsim $90° - \alpha + \widehat{B} + \beta = 180° \Rightarrow \beta - \alpha + \widehat{B} = 90°$ și la fel $\gamma - \alpha + \widehat{C} = 90°$, $\delta - \gamma + \widehat{D} = 90°$. În A vom avea $\sphericalangle QAM = \theta = 90 - \delta + \widehat{A} + \alpha$. Adunînd cele patru relații, obținem $270° + \theta = 90° + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 90° + 360° \Rightarrow \theta = 180°$; Q, A, M sînt coliniare.

b) În cercurile (O_1), (O_2) secanta MN trece prin B și $MA \parallel NC$. Rezultă că AC trece prin al doilea punct comun al celor două cercuri (vezi cap. 2, problema 9 proprietate reciprocă).

9. Fie $G \equiv OA \cap BF$ și $H \equiv OA \cap CE$ (fig. 16). Se știe că latura triunghiului echilateral înscris trece prin mijlocul razei cercului, perpendiculară pe ea, deci $AG = GO = OH = \frac{R}{2} = \frac{l}{2}$. Deoarece $LR \parallel CE$, triunghiul echilateral $ALR \sim \Delta ACE$; raportul de asemănare este dat și de raportul înălțimilor, deci

$$\frac{LR}{CE} = \frac{AG}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow LR = \frac{CE}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{3}.$$

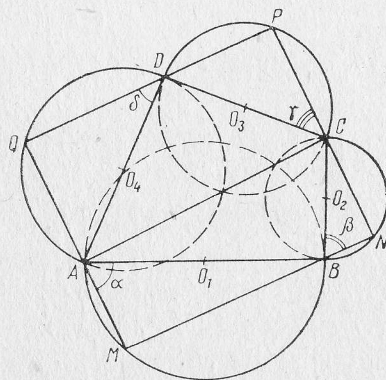


Fig. 15

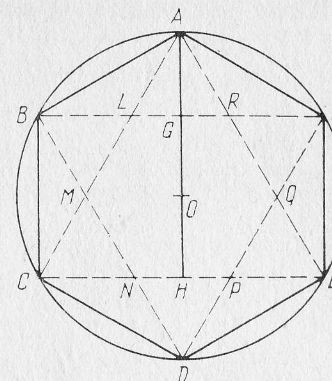


Fig. 16

Pentru calculul lui AN se poate folosi triunghiul dreptunghic AHN, unde

$$AH = 3\frac{R}{2} \quad \text{și } NH = \frac{1}{2}LR = \frac{l\sqrt{3}}{6}.$$

Rezultă

$$AN = \sqrt{\frac{9l^2}{4} + \frac{l^2}{12}} = \sqrt{\frac{7l^2}{3}} = \frac{l\sqrt{21}}{3}.$$

10. Fie H mijlocul lui BM. Avem arc BN = arc $HM \Rightarrow BH \parallel NM$ (fig. 17). Dar latura triunghiului echilateral înscris trece prin mijlocul razei, perpendiculară pe ea, deci D este mijlocul lui OM. Apoi MN subîntinde

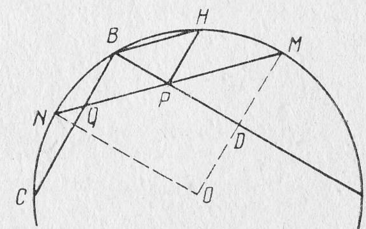


Fig. 17

arcul $MN = 90°$ şi este latura pătratului înscris, adică $\sphericalangle MON = 90°$. Rezultă $DP \parallel ON$, care arată că P este mijlocul lui MN. Se deduce imediat $\Delta PMH = \Delta PBN \Rightarrow PH = PB$ şi $\sphericalangle MPH = \sphericalangle NPB$ şi $\widehat{PHB} = \widehat{PBH}$ $(BH \parallel MN)$, deci ΔPBH este isoscel. Dar în triunghiul BQP avem $\widehat{P}=\widehat{Q}=45°$ (măsura unghiurilor), astfel că şi ΔBQP este isoscel. Avînd o latură comună (PB) şi toate unghiurile respectiv egale, ele sînt egale, de unde $QP = BH$, care subîntinde 30° şi este latura dodecagonului convex înscris în cerc.

3

1. Se poate pleca de la $\Delta BEE' \sim \Delta BAD$ şi $\Delta CFF' \sim \Delta CAD$ (fig. 3.1). Rezultă

$$\frac{BE'}{BD} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE' = \frac{BD \cdot BE}{AB}$$

şi analog

$$F'C = \frac{DC \cdot FC}{AC} \Rightarrow \frac{BE'}{F'C} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{BE}{FC} \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 \cdot \frac{AC}{AB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^4;$$

s-a folosit relaţia din problema 1.

Altfel. Din triunghiurile dreptunghice BED şi CFD rezultă $BE' = \frac{BE^2}{BD}$, $F'C = \frac{FC^2}{DC}$ etc.

2. a) Se poate face o figură asemănătoare cu fig. 3.6, dar cu segmente neegale. Ca şi în problema 8, cap. 3, se deduce

$$2MA_0^2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2 = 2MB_0^2 + \frac{1}{2}B_1B_2^2$$

sau

$$MA_0^2 - MB_0^2 = \frac{1}{4}(B_1B_2^2 - A_1A_2^2) = \text{const.}$$

Diferenţa *pătratelor distanţelor* la punctele fixe A_0, B_0 fiind constantă, locul geometric al punctului M este o dreaptă perpendiculară pe A_0B_0.

b) Dacă luăm segmentele A_1A_2 şi C_1C_2, atunci avem

$$MA_0^2 - MC_0^2 = \frac{1}{4}(C_1C_2^2 - A_1A_2^2) = \text{const},$$

deci locul geometric este o perpendiculară pe A_0C_0. Punctul M comun celor două perpendiculare este unic determinat şi satisface condiţiile enunţului, deoarece

$$2MA_0^2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2 = 2MB_0^2 + \frac{1}{2}B_1B_2^2$$

şi

$$2MA_0^2 + \frac{1}{2}A_1A_2^2 = 2MC_0^2 + \frac{1}{2}C_1C_2^2.$$

Rezultă

$$2MB_0^2 + \frac{1}{2}B_1B_2^2 = 2MC_0^2 + \frac{1}{2}C_1C_2^2,$$

deci a treia perpendiculară pe B_0C_0 trece prin intersecţia primelor două.

c) Cazul a) extins în spaţiu duce la un plan perpendicular pe A_0B_0, ca loc geometric. În cazul b) avem trei plane perpendiculare pe A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0, care trec prin aceeaşi dreaptă $\Delta \perp$ pl. $(A_0B_0C_0)$. Acesta este locul geometric, dacă A_0, B_0, C_0 nu sînt coliniare.

3. Considerînd punctele diametral opuse A şi D în triunghiul MAD (fig. 18), MO este mediană, deci

$$MO^2 = \frac{2(MA^2 + MD^2) - AD^2}{4}$$

şi analog în triunghiurile MBE, MCF. Adunînd cele trei egalităţi şi ţinînd seama că $AD = BE = CF = 2R$, se obţine

$$MO^2 = \frac{k^2}{6} - R^2 = \text{const.}$$

Deci, locul geometric este un cerc concentric cu cercul circumscris hexagonului.

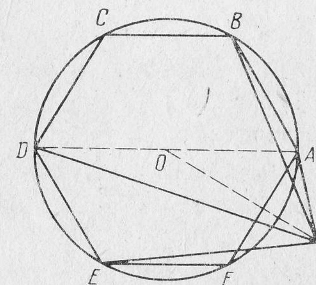


Fig. 18

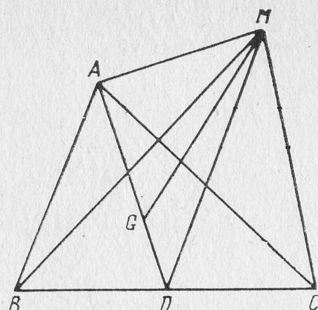


Fig. 19

4. Relația lui Stewart aplicată configurației M, A, G, D ne dă (fig. 19)

$$MA^2 \cdot GD - MG^2 \cdot AD + MD^2 \cdot AG = AG \cdot GD \cdot AD,$$

sau deoarece

$AG = 2GD$ și $AD = 3GD$, $MA^2 - 3MG^2 + 2MD^2 = 6GD^2 = 2GD^2 + AG^2$

de unde

$$3MG^2 = MA^2 + 2MD^2 - 2GD^2 - AG^2. \quad (1)$$

Însă MD și GD sînt mediane în triunghiurile MBC, GBC, deci

$$2MD^2 = MB^2 + MC^2 - \frac{BC^2}{2} \text{ și } 2GD^2 = GB^2 + GC^2 - \frac{BC^2}{2}.$$

Înlocuind în (1), rezultă

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - GB^2 - GC^2 - GA^2,$$

adică relația din enunț.

5. a) Patrulaterul $ABA'B'$ (fig. 20) este inscriptibil ($\sphericalangle AA'B = \sphericalangle AB'B = 90°$), deci $\sphericalangle B'A'C = \widehat{A}$ ($A'B'$ este antiparalelă cu AB); la fel $\sphericalangle C'A'B = \widehat{A} \Rightarrow \sphericalangle B'A'C' = 180° - 2\widehat{A}$.

b) Notăm cu S_1, S_2, S_3 ariile triunghiurilor OBC, OCA, OAB. Observînd că $\sphericalangle BOC = 2\widehat{A}$ etc., dacă S' este aria triunghiului ortic $A'B'C'$ putem scrie

$$\frac{S_1}{S'} = \frac{R^2}{b'c'}, \quad \frac{S_2}{S'} = \frac{R^2}{c'a'}, \quad \frac{S_3}{S'} = \frac{R^2}{a'b'},$$

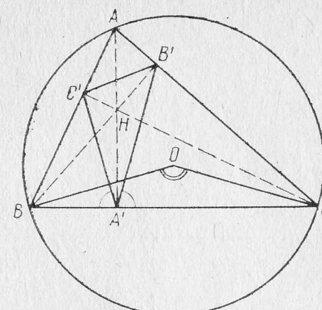


Fig. 20

deci

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2(a' + b' + c')}{a'b'c'}, \quad (1) \qquad S' = \frac{a'b'c'}{a' + b' + c'} \cdot \frac{S}{R^2}. \quad (2)$$

c) Notînd $2p' = a' + b' + c'$ și știind că $a'b'c' = 4\rho S'$, din (1) se deduce $\rho = \frac{R^2 p'}{2S}$. Însă se știe și se poate demonstra că $S = Rp'$ și, prin urmare, $\rho = \frac{R}{2}$.

6. Toate coardele cercului (O), *tangente* cercului interior concentric, sînt egale, deci ducînd tangenta în C la cercul interior (fig. 21), obținem coarda $EF = MN$ (oarecare). Scriind puterea punctului C în cercul (O), avem $EC \cdot CF = EC^2 = AC \cdot CB =$ const,

$$EC = \frac{EF}{2} = \text{const, deci } MN = EF = 2\sqrt{AC \cdot CB} = \text{const}.$$

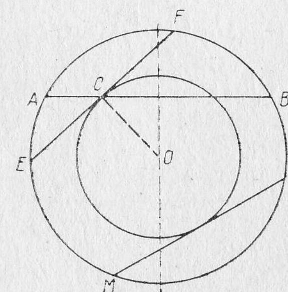


Fig. 21

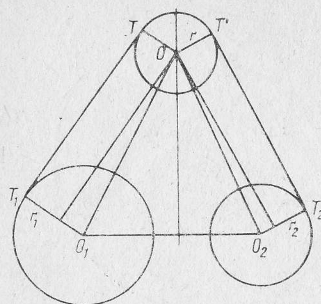


Fig. 22

7. a) Dacă TT_1 și $T'T_2$ sînt tangentele comune exterioare (fig. 22), paralelele duse prin O la ele formează cu razele O_1T_1 și O_2T_2 triunghiuri dreptunghice din care se scot $TT_1^2 = OO_1^2 - (r_1 - r)^2$, $TT_2^2 = OO_2^2 - (r_2 - r)^2$. Egalînd expresiile, se deduce $OO_1^2 - OO_2^2 = (r_1 - r)^2 - (r_2 - r)^2 = \text{const.}$ Locul este o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2 (diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe este constantă).

b) Pentru ca O să aparțină mediatoarei lui O_1O_2 trebuie ca $OO_1 = OO_2 \Rightarrow (r_1 - r)^2 - (r_2 - r)^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2 - 2r) = 0$, de unde $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ (media aritmetică).

8. Fie $I \equiv AC \cap BD$. Observînd că unghiurile $\widehat{A}$ și $\widehat{C}$ ale patrulaterului sînt suplimentare, putem scrie (fig. 23)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$

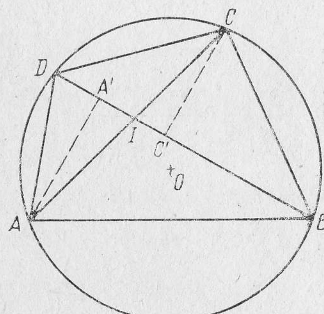


Fig. 23

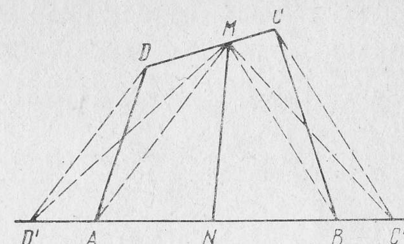


Fig. 24

Dar

$$\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \frac{BD \cdot AA'}{BD \cdot CC'} = \frac{AA'}{CC'} = \frac{AI}{IC}.$$

(Ultimele două rapoarte rezultă din $\triangle AIA' \sim \triangle CIC'$). Deci

$$\frac{AI}{IC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$

9. Transformăm patrulaterul într-un triunghi echivalent (fig. 24) ducînd $DD' \parallel MA$ și $CC' \parallel MB$ ($D', C' \in AB$). Triunghiul echivalent $MD'C'$ se descompune în două triunghiuri echivalente ducînd mediana MN. Revenind la patrulaterul inițial, avem $S_{MD'N} = S_{MDAN}$, $S_{MC'N} = S_{MCBN}$, deci MN desparte patrulaterul $ABCD$ în două patrulatere echivalente. S-a pus condiția ca M să fie pe latura cea mai mică pentru a evita posibilitatea ca mijlocul N al lui $D'C'$ să iasă în afara segmentului AB

10. a) Patrulaterele $OQAM$, $OMBN$, $ONCP$, $OPDQ$ sînt inscriptibile (fig. 25), deci $\sphericalangle OMQ = \sphericalangle OAQ$; $\sphericalangle OMN = \sphericalangle OBN$;

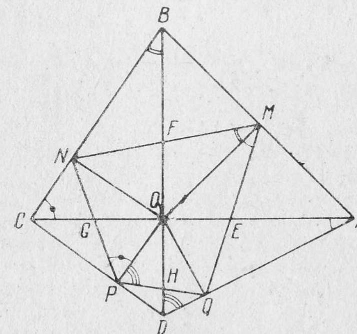


Fig. 25

$\sphericalangle OPQ = \sphericalangle ODQ$ și $\sphericalangle OPN = \sphericalangle OCN$. Adunîndu-le, obținem $\hat{M} + \hat{P} = (\sphericalangle OQA + \sphericalangle ODQ) + (\sphericalangle OBN + \sphericalangle OCN) = 90° + 90° = 180°$, deci $MNPQ$ este inscriptibil.

b) În triunghiul dreptunghic OAB avem $AM \cdot MB = OM^2$ și

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \quad \text{(vezi 3.2, proprietatea 5).}$$

Prima parte a egalității devine

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2};$$

doua parte conduce la aceeași expresie.

c) Avem $\frac{MA}{MB} = \frac{OA^2}{OB^2}$ (vezi 3.2, proprietatea 3) etc. Înlocuind în prima parte a egalității, toți factorii de la numărător se simplifică cu cei de la numitor.

d) Conform problemei 8 de mai înainte, în patrulaterul inscriptibil $OQAM$ avem

$$\frac{EA}{OE} = \frac{OM \cdot OQ}{AM \cdot AQ} \quad \text{etc.,}$$

deci prima parte a egalității devine

$$\frac{OQ \cdot OM}{AM \cdot AQ} \cdot \frac{OM \cdot ON}{BM \cdot BN} \cdot \frac{ON \cdot OP}{CN \cdot CP} \cdot \frac{OP \cdot OQ}{DP \cdot DQ} =$$

$$= \frac{OM^2 \cdot ON^2 \cdot OP^2 \cdot OQ^2}{(AM \cdot BM) \cdot (BN \cdot CN) \cdot (CP \cdot DP) \cdot (DQ \cdot AQ)} = 1,$$

deoarece $OM^2 = AM \cdot BM$ etc.

4

1 Fie (α), (β), (γ) cele trei plane care trec prin (Δ), (π) planul căutat și d_1, d_2, d_3 dreptele după care acesta intersectează (α), (β), (γ). Deoarece trebuie ca $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$, este necesar ca acestea să fie *paralele cu* (Δ) (a se vedea problema 3). Ca metodă vom folosi reducerea problemei la o problemă de geometrie plană (fig. 26). Ducem prin M planul $(\delta) \perp (\Delta)$. Acesta interesectează pe (Δ) în O iar planele (α), (β), (γ) după dreptele Ox, Oy, Oz. Problema s-a redus la a găsi o dreaptă $\in (\delta)$ care trece prin M și taie pe Ox, Oy, Oz respectiv în N, P, Q, astfel ca $NP = PQ$. Pentru a găsi direcția de drepte care determină între Ox, Oy, Oz segmente egale alegem următoarea metodă: se ia $\omega \in Oy$ și se duc $\omega Q' \parallel Ox$, $\omega N' \parallel Oz$. Diagonalele

Fig. 26

paralelogramului $ON'\omega Q'$ se taie în părți egale, deci $P' \equiv O\omega \cap N'Q'$ este mijlocul lui $N'Q'$. Paralela dusă prin M la $N'Q'$ determină pe Ox, Oy, Oz punctele N, P, Q astfel că $NP = PQ$. Planul căutat (π) este paralel cu (Δ) și conține dreapta $MNPQ$, iar dreptele echidistante căutate sînt paralelele duse prin N, P, Q la muchia comună (Δ).

2. a) Este o aplicație directă a teoremei 4 din 4.3. Într-adevăr, planul (P) care conține pe AB și este paralel cu CD, planul (π) și planul (Q) care conține pe CD și este paralel cu AB sînt trei plane paralele, care determină pe segmentele BC și AD segmente proporționale (fig. 27).

b) Ducem $AG \parallel BC$, unde $G \in (Q) \Rightarrow CG \parallel AB$ și $CG = AB$. Notăm cu J, I, L mijloacele segmentelor AB, MCN, CD, cu H, E, F mijloacele lui AG, MH și CG și cu I', L' mijloacele lui HN și GD. Avem $HN \equiv (\pi) \cap (AGD)$ și $GD \equiv (Q) \cap (AGD) \Rightarrow HN \parallel GD$. Apoi este clar că $EI \parallel HN$,

Fig. 27

$EI = HI'$ și $II' \parallel JA$, $II' = JA$. În mod asemănător se arată că $FL = \parallel GL'$ și $IL' = \frac{1}{2} CG = AJ$. Se deduce că atunci cînd planul (π) se deplasează paralel cu AB și CD, $I'I$ capătă o mișcare de translație și deoarece $AI'L'$ este mediană în triunghiul ADG, punctul I descrise segmentul JL paralel și egal cu această mediană. Locul lui I este deci segmentul închis JL care unește mijloacele laturilor AB și CD.

3. Cînd punctul B se mișcă oricum în planul (Q), locul extremității A a segmentului $BA = l \parallel (D)$ este format din două plane (fig. 28) $(R_1) \parallel (R_2) \parallel (Q)$ de o parte și de alta a lui (Q). Acestea intersectează planul (P) după două drepte $(\Delta)_1 \parallel (\Delta_2)$. Punctele A căutate trebuie să aparțină acestor drepte, dar și cercului $(O) \in (P)$ cu centrul în O și cu raza a, deci trebuie să fie punctele comune ale dreptelor cu cercul. Dintr-un punct A astfel aflat se duce $AB \parallel (D)$ și se găsește soluția AB cerută.

Discuție. a) Dacă cercul (O) taie ambele drepte (Δ_1) și (Δ_2), atunci există *patru* puncte de intersecție A, A_1, A_2, A_3, cărora le corespund soluțiile AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.

b) Dacă (O) este tangent dreptei (Δ_2), atunci problema are trei soluții.

c) Dacă numai (Δ_1) este secantă cercului (O), problema are două soluții.

d) Dacă (O) este tangent dreptei (Δ_1), există o singură soluție.

e) Dacă (O) nu taie nici una dintre drepte, problema nu are soluție.

4. a) Considerăm două plane paralele (P) și (P'), care determină pe Ox, Oy, Oz respectiv punctele A, A'; B, B'; C, C'. Avem evident $A'B' \parallel AB$ (plane paralele tăiate de planul xOy), $B'C' \parallel BC$, $C'A' \parallel CA$. Rezultă pe fața xOy:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AC} = \frac{OB'}{OB},$$

apoi pe fața yOz:

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC} \text{ etc.}$$

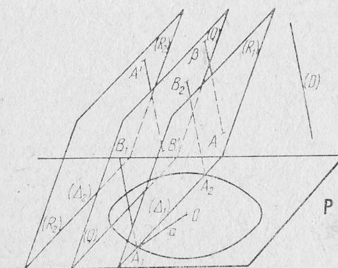


Fig. 28

Deci

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{OA'}{OA} \text{ etc.}$$

Am găsit și raportul de asemănare. Se putea folosi și faptul că laturile sînt paralele, deci unghiurile triunghiurilor sînt egale.

b) Fie G, G' centrele de greutate ale celor două triunghiuri și $M \equiv AG \cap BC$, $M' \equiv A'G' \cap B'C'$. Triunghiurile OBC și $OB'C'$, cu $BC \parallel B'C'$, au ca mediană dreapta OMM', dar OM și OA determină un plan în care $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$ și asemănător $\frac{G'M'}{G'A'} = \frac{1}{2}$, de unde rezultă că punctele O, G, G' sînt coliniare. Cînd planul (P) are o mișcare de translație, locul lui G este o dreaptă $\Delta \in$ pl. (OA, OM) și trece prin O.

5. Considerăm triunghiul oarecare ABC și mediana AM. Oricare ar fi planul de proiecție, mediana AM se proiectează tot ca mediană a triunghiului proiectat. Trebuie deci găsit un plan pe care mediana să se proiecteze și ca înălțime; atunci triunghiul proiectat este isoscel. Pentru aceasta ducem prin M_0 o perpendiculară (Δ) pe dreapta BC, care să nu fie în planul ABC. În planul (Δ, MA) ducem $AE \perp (\Delta)$, $E \in (\Delta)$, apoi un plan arbitrar (π) peprpendicular pe AE (fig. 29). Să proiectăm acum vîrfurile triunghiului ABC pe acest plan în A', B', C'. Proiecția M' a lui M este mijlocul lui $B'C'$, iar E se proiectează în A'. Pe de altă parte, $\sphericalangle BME = 90°$ și avînd $ME \parallel (\pi)$, se proiectează în adevărată mărime, deci $A'M'$ este mediană și înălțime, adică $A'B'C'$ este isoscel.

6. Presupunem problema rezolvată; fie planul P care conține pe A, D și să notăm P_b și P_c planele paralele cu P care trec prin B și C, apoi $L \equiv \delta \cap P_b$, $M \equiv \delta \cap P$, $N = \delta \cap P_c$. Dacă $P_b \parallel P \parallel P_c$ determină pe δ segmente egale $LM = MN$, atunci determină pe orice altă dreaptă segmente egale, deci P intersectează pe BC în mijlocul său E (fig. 30).

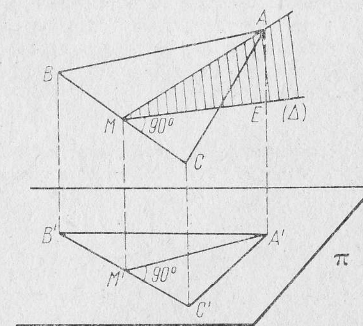


Fig. 29

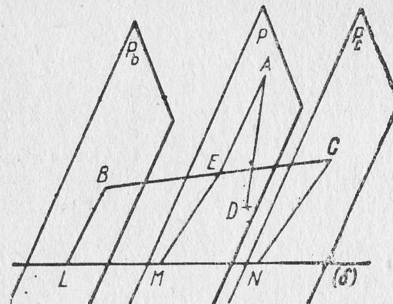


Fig. 30

Construcția. Punctele fixe A, D, E definesc planul P, apoi prin B și C se duc $P_b \parallel P_c \parallel P$ care determină pe δ segmentele egale $LM = MN$.

Discuție. Planul ADE este de fapt planul median al tetraedrului $ABCD$, relativ la muchia AD. Dar un tetraedru are șase muchii, deci se pot duce *șase plane mediane*, ceea ce înseamnă că problema are în general *șase soluții*. Dacă δ este paralelă cu unul dintre planele mediane, se pierde soluția corespunzătoare acelui plan, deci rămîn *cinci soluții*. Dacă δ este paralelă cu două plane mediane (deci și cu dreapta lor de intersecție), atunci *numărul de soluții se reduce la patru*. Cel mai mic număr de soluții este trei, căci dacă cele trei plane mediane au un vîrf comun, acestea se taie după mediana tetraedrului, care pleacă din acel vîrf.

7. Fie M și N respectiv picioarele medianelor din B și C în triunghiurile $BB'C$ și $DD'A$. Se observă că $BB'DA$ este paralelogram ($BB' \# AD$), deci diagonalele BD și AB' se taie în O, mijlocul lui BD. În mod asemănător $DD'BC$ este paralelogram, deci CD' trece prin O. Rezultă că AB' și CD' se întîlnesc în O și se taie în părți egale, adică $AD'B'C$ este paralelogram. MN unește mijloacele a două laturi opuse în acest paralelogram, deci trece prin centrul său O; cu alte cuvinte, MN întîlnește pe BD în O, prin urmare, ele determină un plan. Se mai deduce că $BM \parallel DN$ fiind laturile unui paralelogram.

8. Notăm cu E și F mijloacele diagonalelor AC și BD. În triunghiurile MAC și MBD segmentele ME și MF sînt mediane, deci se poate scrie (fig. 31)

$$MA^2 + MC^2 = 2ME^2 + \frac{AC^2}{2},$$

$$MB^2 + MD^2 = 2MF^2 + \frac{BD^2}{2},$$

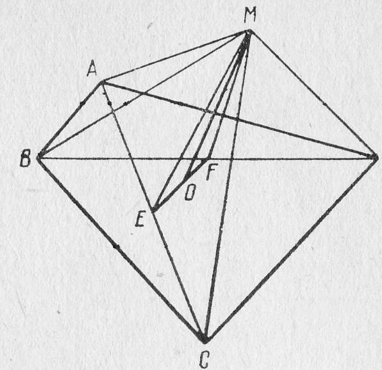


Fig. 31

care adunate dau

$$MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AC^2 + BD^2}{2} = k^2 = \text{const}.$$

Dacă O este mijlocul segmentului EF, atunci MO este mediană în triunghiul MEF, deci

$$ME^2 + MF^2 = 2MO^2 + \frac{EF^2}{2}.$$

Înlocuind în relația precedentă, rezultă

$$MO^2 = \frac{k^2 - EF^2}{4} - \frac{AC^2 + BD^2}{8} = \text{const}.$$

Deci, locul geometric este o sferă cu centrul în O. Condiția de existență a locului este

$$k^2 > EF^2 + \frac{AC^2 + BD^2}{2}.$$

9. Notăm cu E și E' respectiv mijloacele segmentelor BC și $B'C'$ și cu F mijlocul segmentului MN (fig. 32). Se știe că mijloacele laturilor unui patrulater strîmb formează un paralelogram, deci $ENE'M$ este paralelogram; în consecință F este și mijlocul lui EE'. Fie a și l distanțele de la A și E la planul ε. Locul lui L este un plan $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$, la distanța $a/2$ de la A, iar locul lui F un plan ε_2 la distanța $l/2$ de E.

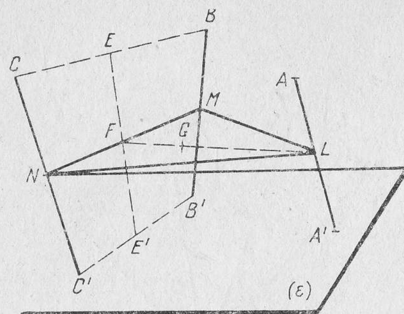


Fig. 32

Deoarece G împarte segmentul LF în raportul $\frac{LG}{GF} = 2$, locul lui G este un alt plan $\varepsilon' \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ situat la distanța $\frac{2}{3}d$ de ε_1, unde d este distanța dintre ε_1 și ε_2. Întrucît A', B', C' se pot mișca în întreg planul ε, locul geometric al punctului G este întreg planul ε'.

Reciproc, G fiind un punct oarecare al planului ε', să demonstrăm că se pot găsi trei puncte A', B', C' în planul ε, astfel ca G să fie centrul de greutate al triunghiului LMN. Ducem prin G o dreaptă oarecare și fie L și F intersecțiile ei respectiv cu planele ε_1 și ε_2. Deoarece ε' se află la distanța $\frac{2}{3}d$ de ε_1, avem $\frac{LG}{GE} = 2$. Dreapta EF taie planul ε în E', iar AL îl taie în A'. Se iau în planul ε două puncte B' și C' simetrice față de E' și se găsește un grup de puncte A', B', C' pentru care G este centrul de greutate al triunghiului LMN. Prin urmare, toate punctele planului ε' aparțin locului geometric.

Observație. Dacă se notează cu a, b, c distanțele de la punctele A, B, C la planul ε, atunci se poate arăta ușor că distanța de la G la planul ε este

$$d = \frac{a + b + c}{6} = \text{const.}$$

10. Dacă triunghiul ABC este isoscel, punctul A se află în planul mediator (Q) al segmentului BC, deci $(Q) \perp (\Delta)$. Prin urmare, planul (Q) se poate construi imediat ducînd prin A planul perpendicular pe (Δ). Punctele B și C fiind simetrice față de (Q), se construiesc astfel (fig. 33): simetrica (D') a dreptei (D) înțeapă planul (P) în B, al cărui simetric față de (Q) este C. Problema admite în general o singură soluție, afară de cazul

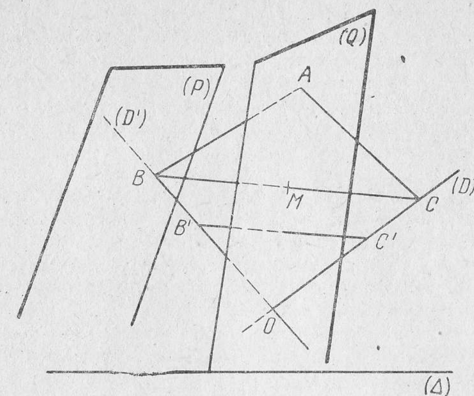


Fig. 33

cînd $(P) \parallel (D')$ și punctul B nu există. Simetrica (D') a dreptei (D) se construiește astfel: fie $O \equiv (D) \cap (Q)$, $C' \in (D)$ un punct arbitrar și B' simetric lui C' față de (Q); dreapta OB' este simetrica lui (D) față de (Q).

5

1. Punctul A și dreapta (Δ) determină un plan (Q). Fie (fig. 34) $(d) \equiv (Q) \cap (P)$. Dacă (d) taie cercul (O) în M_1 și M_2, atunci soluțiile problemei sînt dreptele AM_1 și AM_2. Într-adevăr, aceste drepte fiind în planul (Q) întîlnesc dreapta (Δ), prin urmare, trec prin A, se sprijină pe (Δ) și, de asemenea, pe cercul (O).

Discuție. Dacă (d) este secantă cercului (O), atunci ne găsim în cazul precedent și problema are două soluții. Dacă (d) este tangentă cercului (O)

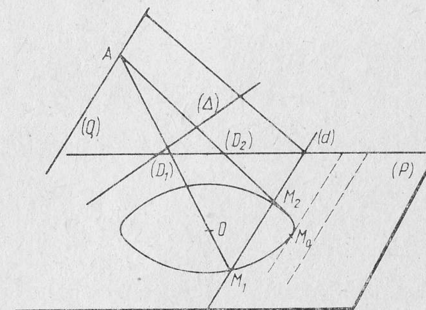


Fig. 34

în M_0, există o singură soluție, AM_0, generatoarea situată în planul tangent la conul cu vîrful A și baza cercul (O), evident un con oarecare, în general (nu de rotație). Dacă (d) este exterioară cercului (O), problema nu are nici o soluție. În sfîrșit, în cazul în care (d) este secantă cercului (O) se poate ca (Δ) să fie paralelă cu una dintre dreptele AM_1 sau AM_2, de exemplu cu AM_2. În acest caz dreapta AM_2 nu întîlnește pe (Δ) și problema are ca singură soluție pe AM_1.

2. Se știe că dacă trei puncte sînt în linie dreaptă, aceste puncte se proiectează prin drepte paralele pe un plan oarecare, astfel că *raportul* în care unul dintre puncte împarte segmentul format de celelalte două se păstrează în proiecție. De aici rezultă că proiectînd un triunghi prin drepte paralele: a) mijloacele laturilor se proiectează tot ca mijloace ale laturilor proiectate; b) medianele triunghiului se proiectează tot ca mediane și deci c) centrul de greutate al triunghiului dat se proiectează ca centru de greutate al triunghiului proiectat pe planul considerat (P). În tetraedrul $ABCD$ notăm cu G_a, G_b, G_c, G_d centrele de greutate ale fețelor opuse vîrfurilor A, B, C, D. Pentru ca A' să fie centrul de greutate al triunghiului $B'C'D'$, trebuie ca el să fie proiecția prin paralele a centrului de greutate G_a, adică $A' \equiv AG_a \cap (P)$. Am găsit astfel că direcția paralelelor duse prin A, B, C, D este dată de mediana AG_a a tetraedrului.

Discuție. a) Un tetraedru are *patru mediane*, deci problema admite în general *patru soluții*. b) Dacă planul (P) este paralel cu una dintre mediane, atunci paralelele duse prin A, B, C, D la această mediană nu întîlnesc planul (P) și problema are *trei soluții* c) Dacă planul (P) este paralel cu două mediane, deci cu planul determinat de ele (medianele tetraedrului sînt concurente), atunci sînt două direcții de drepte care nu dau soluții și problema are numai *două solțuii*. În consecință, numărul de soluții poate fi patru, trei sau două.

3. Notînd cu s aria comună celor două secțiuni determinate de planul (H') în piramide și scriind că raportul dintre aria secțiunii și aria bazei este egal cu raportul pătratelor înălțimilor, avem (fig. 35)

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{h-x}{h}\right)^2, \quad \frac{s}{S'} = \left(\frac{h'-x}{h'}\right)^2$$

de unde rezultă

$$\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}} = \frac{h-x}{h} \quad \text{și} \quad \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S'}} = \frac{h'-x}{h'}.$$

Egalînd valorile lui s din cele două ecuații, obținem

$$\frac{h-x}{h}\sqrt{S} = \frac{h'-x}{h'}\sqrt{S'} \Rightarrow \sqrt{S} - x\frac{\sqrt{S}}{h} = \sqrt{S'} - x\frac{\sqrt{S'}}{h'},$$

de unde rezultă

$$\frac{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}{x} = \frac{\sqrt{S}}{h} - \frac{\sqrt{S'}}{h'}.$$

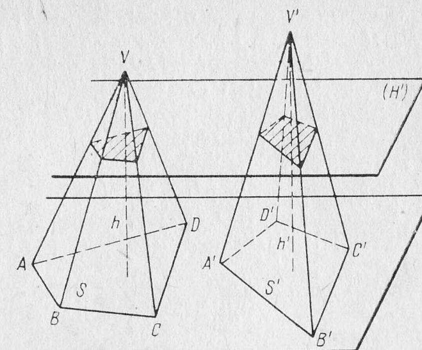


Fig. 35

4. Avem $VD = \frac{3}{4}b$, $VE = \frac{1}{2}b$, $VF = \lambda b$ (fig. 36).

a) Notînd unghiul a două muchii cu θ, rezultă din triunghiurile VDE, VEF, VFD:

$$DE^2 = \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{4}b^2 - 2\cdot\frac{3}{8}b^2\cos\theta = \frac{13-12\cos\theta}{16}b^2,$$

$$EF^2 = \frac{1}{4}b^2 + \lambda^2 b^2 - 2\cdot\frac{\lambda}{2}b^2\cos\theta = \frac{1+4\lambda^2-4\lambda\cos\theta}{4}b^2,$$

$$FD^2 = \frac{9}{16}b^2 + \lambda^2 b^2 - 2\cdot\frac{3}{4}b^2\cos\theta = \frac{9+16\lambda^2-24\lambda\cos\theta}{16}b^2.$$

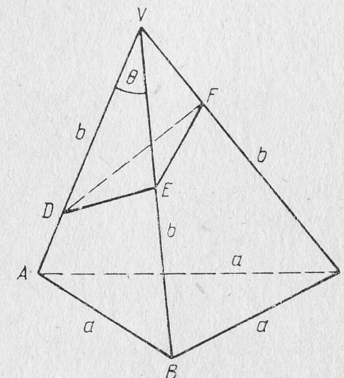


Fig. 36

Scriind că $DE^2 + EF^2 = FD^2$, avem (suprimînd pe b^2)

$$13 - 12\cos\theta + 4 + 16\lambda^2 - 16\lambda\cos\theta = 9 + 16\lambda^2 - 24\lambda\cos\theta,$$

de unde

$$\lambda = \frac{3\cos\theta - 2}{2\cos\theta}.$$

Însă orice față a piramidei regulate este triunghi isoscel, deci

$$a = 2b\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{a}{2b}$$

din care rezultă

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{a^2}{2b^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}.$$

Se deduce

$$\lambda = \frac{2b^2 - 3a^2}{2(2b^2 - a^2)}.$$

Pentru ca $F \in VC$ trebuie ca $0 < \lambda < 1$, ceea ce duce la

$$b^2 > \frac{3}{2}a^2.$$

b) Deoarece tetraedrele $VDEF$ și $VABC$ au un triedru comun, conform teoremei de la problema 9, avem

$$\frac{v}{V} = \frac{VD \cdot VE \cdot VF}{VA \cdot VB \cdot VC} = \frac{3\lambda}{8}, \quad \text{dar} \quad \frac{v}{V} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ și } VF = \frac{2}{3}b.$$

5. a) Procedînd ca la problema precedentă, deoarece $\cos 60° = 1/2$ (fig. 37), se găsește $B'C' = \frac{\sqrt{7}}{4}a$, $C'D' = \frac{\sqrt{7}}{4}a$; $D'B' = \frac{\sqrt{3}}{4}a$, deci triunghiul $B'C'D'$ este isoscel. Pentru arie folosim formula $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ în care $p = \frac{2\sqrt{7} + \sqrt{3}}{8}a$; $p - B'C' = p - C'D' = \frac{a\sqrt{3}}{8}a$, $p - D'B' = \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{3}}{8}a$, prin urmare

$$S_{B'C'D'} = \frac{a\sqrt{3}}{8}\sqrt{\frac{(2\sqrt{7} + \sqrt{3})(2\sqrt{7} - \sqrt{3})}{64}}\, a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{64}a^2.$$

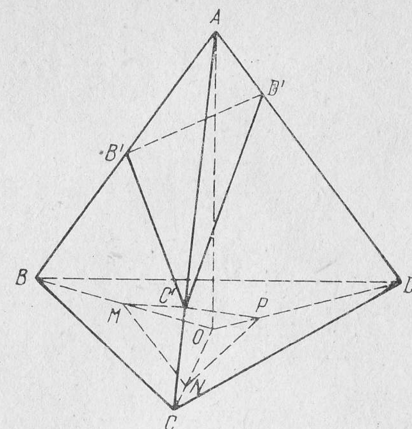


Fig. 37

b) Deoarece rapoartele se păstrează în proiecție, punctele B', C', D' se proiectează pe planul (BCD) respectiv în M, N, P astfel că dacă O este centrul triunghiului de bază BCD, R raza cercului circumscris bazei și S aria bazei, avem

$$OM = \frac{1}{2}R, \; ON = \frac{3}{4}R, \; OP = \frac{1}{4}R.$$

Ținînd seama că $S_{OBC} = S_{OCD} = S_{ODB} = \frac{1}{3}S$, în baza teoremei raportului ariilor triunghiurilor cu cîte un unghi egal, putem scrie

$$\frac{S_{OMN}}{\frac{1}{3}S} = \frac{OM \cdot ON}{R^2} = \frac{3}{8} \Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{8}S,$$

$$\frac{S_{ONP}}{\frac{1}{3}S} = \frac{ON \cdot OP}{R^2} = \frac{3}{16} \Rightarrow S_{ONP} = \frac{1}{16}S.$$

$$\frac{S_{OPM}}{\frac{1}{3}S} = \frac{OP \cdot OM}{R^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow S_{OPM} = \frac{1}{24}S,$$

Prin adunare se găsește

$$S_{MNP} = \frac{11}{48}\cdot S = \frac{11}{48}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Prin urmare

$$\cos\alpha = \frac{S_{MNP}}{S_{B'C'D'}} = \frac{11}{15} \Rightarrow \alpha = 42°50'.$$

c) Cele două tetraedre avînd un triedru comun, raportul volumelor lor este

$$\frac{V'}{V} = \frac{AB'\cdot AC'\cdot AD'}{AB\cdot AC\cdot AD} = \frac{3}{32} \Rightarrow V' = \frac{3}{32}V.$$

Dar volumul tetraedrului regulat este $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, de unde

$$V' = \frac{\sqrt{2}}{128}a^3.$$

6. a) Notăm cu a ipotenuza triunghiului. Avem (fig. 38)

$$AD = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad AE\cdot AC = AD^2 \Rightarrow AE = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$$

și analog

$$AF = \frac{b^2c}{b^2+c^2},$$

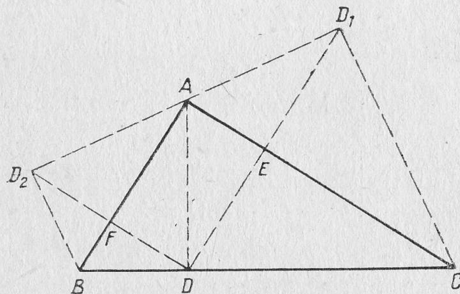


Fig. 38

apoi

$$EC = AC - AE = b - \frac{bc^2}{b^2+c^2} = \frac{b^3}{b^2+c^2}$$

și analog

$$BF = \frac{c^3}{b^2+c^2}.$$

În sfîrșit

$$BD = \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}} \text{ și } CD = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

(vezi și cap. 3).

b) Dacă V_1 și V_2 sînt volumele conurilor rezultate prin rotirea în jurul lui AC a lui AD și CD, avem

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3}DE^2\cdot AE + \frac{\pi}{3}DE^2\cdot EC = \frac{\pi}{3}DE^2\cdot AC = \frac{\pi b^5c^2}{3(b^2+c^2)^2},$$

deoarece $DE = AF$. La fel dacă V_3 și V_4 sînt celelalte volume, avem

$$V_3 + V_4 = \frac{\pi}{3}DF^2\cdot AF + \frac{\pi}{3}DF^2\cdot BF = \frac{\pi}{3}DF^2\cdot AB = \frac{\pi b^2c^5}{3(b^2+c^2)^2}.$$

Rezultă

$$\frac{V_1+V_2}{V_3+V_4} = \left(\frac{b}{c}\right)^3.$$

c) Notăm de asemenea S_1, S_2 ariile laterale ale conurilor cu volumele V_1, V_2 etc. Aria laterală a conului fiind $S = \pi RG$, rezultă

$$S_1+S_2 = \pi DE\cdot AD + \pi DE\cdot DC = \frac{\pi b^2c}{b^2+c^2}\left(\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right) = \frac{\pi b^3c(b+c)}{(b^2+c^2)^{3/2}}$$

și analog

$$S_3 + S_4 = \frac{\pi bc^3(b+c)}{(b^2+c^2)^{3/2}},$$

deci

$$\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4} = \left(\frac{b}{c}\right)^2.$$

Fig. 39

7. Fie R raza sferei, r raza cercului (Γ), g lungimea unei tangente duse din P la sferă și d distanța de la centrul sferei la centrul cercului (Γ). Avem evident (fig. 39)

$$r = R\sin\alpha,\quad g = R\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad d = R\cos\alpha,$$

prin urmare

$$\mathcal{A}_{lat} = \pi r g = \pi R^2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha};\quad \mathcal{A}_\Gamma = \pi r^2 = \pi R^2\sin^2\alpha;$$

$$\mathcal{A}_{cal} = 2\pi R(R + d) = 2\pi R^2(1 + \cos\alpha).$$

Potrivit enunțului trebuie ca

$$4\pi^2R^4(1 + \cos\alpha)^2 = \pi^2R^4\frac{\sin^4\alpha}{\cos\alpha},$$

sau

$$4\cos\alpha\,(1 + \cos\alpha)^2 = (1 - \cos^2\alpha)^2 = (1 + \cos\alpha)^2\,(1 - \cos\alpha)^2.$$

Deoarece $\cos\alpha + 1 \neq 0$ $(\alpha \neq 180°)$, rămîne

$$\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 1 = 0,\quad \cos\alpha = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

din care convine numai soluția $\cos\alpha = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0{,}1682$, la care corespunde $\alpha \approx 80°18'30''$.

8. a) Notînd cu h înălțimea trunchiului de con, trebuie să avem (fig. 40)

$$\frac{2\pi R^3}{3} + \frac{2\pi r^3}{3} + \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{4\pi}{3}(R + r)(R^2 + r^2)$$

Fig. 40

sau

$$2(R^3 + r^3) + h(R^2 + r^2 + Rr) = 4(R + r)(R^2 + r^2),$$

de unde

$$h(R^2 + r^2 + Rr) = 2(R + r)(R^2 + r^2 + Rr),$$

deci

$$h = 2(R + r).$$

b) Fie ρ raza secțiunii plane și d distanța de la planul de secțiune la planul bazei mari a trunchiului de con, apoi AB diametrul bazei mari, $A'B'$ diametrul bazei mici și MN diametrul secțiunii plane. Mai notăm cu C și D proiecția lui B' pe AB și MN (fig. 40). Din $\Delta B'DN \sim \Delta B'CB$ rezultă

$$\frac{\rho - r}{R - r} = \frac{h - d}{h} = 1 - \frac{d}{2(R + r)},$$

$$\frac{d}{2(R + r)} = \frac{R - \rho}{R - r},\quad d = \frac{2(R + r)}{R - r}(R - \rho).$$

Scriem acum că volumul trunchiului de con $ABMN$ plus volumul semisferei de rază R este jumătate din volumul întregului corp, adică

$$\frac{2\pi R^3}{3} + \frac{\pi d}{3}(R^2 + \rho^2 + R\rho) = \frac{2\pi}{3}(R + r)(R^2 + r^2)$$

sau, înlocuind pe d,

$$\frac{R+r}{R-r}(R-\rho)(R^2+\rho^2+R\rho)=r(R^2+r^2+Rr),$$

de unde

$$R^3-\rho^3=\frac{r(R^3-r^3)}{R+r},\quad \rho^3=\frac{R^4+r^4}{R+r},$$

deci

$$\rho=\sqrt[3]{\frac{R^4+r^4}{R+r}}.$$

9. Corpul care ia naștere prin rotație este un segment sferic mărginit la capete de două conuri (fig. 41). Notăm cu O' și O'' centrele cercurilor de contact ale tangentelor duse din P și Q la sferă (bazele conurilor). Triunghiul OPE fiind dreptunghic cu ipotenuza $2R$ și cateta $OE=R$, rezultă $PE=R\sqrt{3}=QF$, apoi $\sphericalangle POE=60°$, deci $O'E=\frac{R\sqrt{3}}{2}$ (jumătate din latura triunghiului echilateral înscris în cercul mare al sferei). OO' este apotema triunghiului echilateral, deci $OO'=\frac{R}{2}$ și $O'A=\frac{R}{2}=h$ (înălțimea calotei sferice), iar $PO'=\frac{3R}{2}$. Cu aceste elemente trecem la calcule.

a) Aria corpului este

$$S=2\pi rG+2\pi R\cdot O'O''=2\pi\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\sqrt{3}+2\pi R\cdot R=5\pi R^2.$$

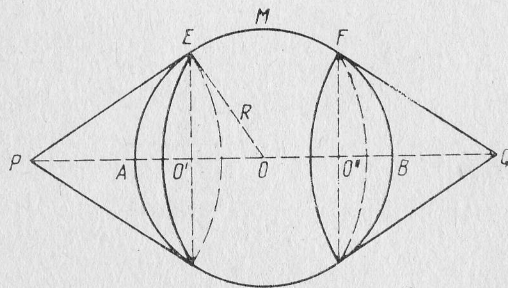


Fig. 41

b) Volumul corpului se compune din de două ori volumul unui con plus volumul segmentului sferic cu înălțimea $O'O''$. Avem

$$V_c=\frac{\pi EO'^2\cdot PO'}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{3R^2}{4}\cdot\frac{3R}{2}=\frac{3\pi R^3}{8};$$

apoi, dacă V'_{sg} este volumul unuia dintre segmentele de sferă interioare conurilor,

$$V_{sg}=\frac{4\pi R^3}{3}-2V'_{sg}=\frac{4\pi R^3}{3}-2\pi O'A^2\left(R-\frac{O'A}{3}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R^3}{3}-2\pi\frac{R^2}{4}\cdot\frac{5R}{6}=\frac{4\pi R^3}{3}-\frac{5\pi R^3}{12}=\frac{11\pi R^3}{12}.$$

Rezultă

$$V=2V_c+V_{sg}=\frac{3\pi R^3}{4}+\frac{11\pi R^3}{12}=\frac{5\pi R^3}{3}.$$

Se observă imediat că raportul dintre ariile corpului de rotație și al sferei este egal cu raportul dintre volumele lor.

Generalizare. Să considerăm $OP=OQ=\lambda R$ $(\lambda>1)$. Rezultă imediat

$$PE=R\sqrt{\lambda^2-1},\quad EO'=\frac{PE\cdot OE}{OP}=R\frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda},\quad OO'=\frac{R}{\lambda},$$

$$AO'=R\frac{\lambda-1}{\lambda},\quad PO'=\lambda R-\frac{R}{\lambda}=R\frac{\lambda^2-1}{\lambda}.$$

Se găsește:

1) Aria $S=2\pi EO'\cdot PE+2\pi R\cdot O'O''=2\pi\left(R^2\frac{\lambda^2-1}{\lambda}+\frac{2R^2}{\lambda}\right)$,

de unde

$$S=2\pi R^2\cdot\frac{\lambda^2+1}{\lambda}.$$

Dacă notăm cu S_0 aria sferei, atunci

$$S=S_0\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}.$$

2) Volumul

$$V=2V_c+V_{sg}=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot\frac{(\lambda^2-1)^2}{\lambda^3}+\frac{4\pi R^3}{3}-2\pi R^2\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2}\left[R-\frac{R(\lambda-1)}{3\lambda}\right]=$$

$$=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot\frac{(\lambda^2-1)^2}{\lambda^3}+\frac{2\pi R^3(3\lambda^2-1)}{3\lambda^3},$$

de unde

$$V=\frac{2\pi R^3}{3}\cdot\frac{\lambda^2+1}{\lambda}.$$

Dacă se notează cu V_0 volumul sferei, atunci

$$V=V_0\cdot\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}.$$

Se vede imediat că *raportul ariilor* și *raportul volumelor* dintre corpul de rotație definit în enunț și sfera dată sînt egale.

Observație. Se poate determina λ astfel ca raportul ariilor (sau al volumelor) să fie un număr dat > 1. Într-adevăr, dacă m este acest raport, atunci λ rezultă din ecuația

$$\frac{\lambda^2+1}{2\lambda}=m \text{ sau } \lambda^2-2m\lambda+1=0,$$

ecuația în care produsul rădăcinilor este egal cu 1 (ecuația reciprocă de gradul al doilea), deci dacă una dintre rădăcini este supraunitară, cealaltă este subunitară. Deoarece trebuie ca $\lambda > 1$, problema admite o singură soluție, dacă $m > 1$.

10. Volumul cerut se obține dacă scădem din volumul sferei pe acela al cilindrului interior și pe acelea ale segmentelor de sferă care au o bază comună cu cilindrul. Avem nevoie de înălțimea cilindrului, care este $H=2\sqrt{R^2-a^2}$ (fig. 42) și înălțimea unei calote, care este $h=R-\sqrt{R^2-a^2}$. Volumul căutat este deci

$$V=\frac{4\pi R^3}{3}-\pi a^2H-2\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R^3}{3}-2\pi a^2\sqrt{R^2-a^2}-2\pi\left(R-\sqrt{R^2-a^2}\right)^2\left(R-\frac{R-\sqrt{R^2-a^2}}{3}\right)$$

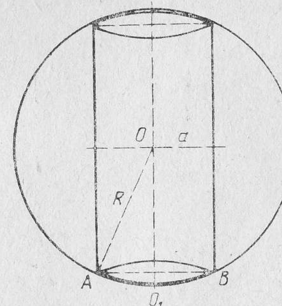


Fig. 42

sau, efectuînd calculele,

$$V=\frac{2\pi}{3}\left(2R^3-3a^2\sqrt{R^2-a^2}-2R^3+2R^2\sqrt{R^2-a^2}+a^2\sqrt{R^2-a^2}\right)=$$

$$=\frac{4\pi}{3}\sqrt{R^2-a^2}\,(R^2-a^2)$$

sau

$$V=\frac{4\pi(R^2-a^2)^{3/2}}{3}.$$

Să se observe asemănarea cu volumul sferei în care raza este înlocuită cu $\sqrt{R^2-a^2}$.